http ://o.castera.free.fr/
o.castera@free.fr

Calcul tensoriel
Application à la relativité

Olivier Castéra

Le 6 janvier 2024

Table des matières

1

La notion d'espace

1.1 Définitions

Disons de suite que l'on ne peut définir tous les termes, certaines notions *primitives* sont sans définition. Par exemple certaines définitions sont circulaires, elles dépendent d'autres définitions qui dépendent elles-mêmes de ce que l'on cherche à définir. La mise en place des premières notions est souvent un procédé itératif, on doit en parler avant de les avoir définies.

On fonctionne par analogie avec notre perception de l'environnement, principalement la feuille de papier ou le tableau noir, et la surface de la Terre.

Définition 1.1.1. *Espace topologique*
Un espace topologique est un ensemble de points dans lequel le voisinage de chaque point est défini, grâce auquel on définit les concepts de continuité, de limite et de connexité. C'est donc un espace dont les éléments sont des points, muni d'une structure appelée topologie, qui définit la notion de voisinage d'un point.

C'est l'espace le plus général dans lequel on puisse faire des mathématiques.

Les systèmes de coordonnées ont probablement pour origine les premières cartes de navigation indiquant les parallèles et les méridiens.

Définition 1.1.2. *Dimension d'un espace topologique*
La dimension d'un espace topologique est le nombre minimal de coordonnées nécessaires pour spécifier un point de cet espace.

Le point et la droite sont des objets mathématiques primitifs, sans définition. On les imagine *plongés* dans le plan, alors que celui-ci n'est pas défini. Pour repérer un point sur une droite dont on a fixé l'origine, il ne faut qu'une seule coordonnée. On peut en utiliser deux si on la plonge dans un plan, mais une seule est nécessaire. Nous pouvons dire que c'est un espace topologique de dimension 1, constitué d'une succession infinie de points, sans extrémités et sans courbure. Néanmoins, la courbure n'étant pas définie, cette définition ne fait que repousser le problème à une autre définition.

Une courbe est un espace topologique de dimension 1, constitué d'une succession infinie de points, sans extrémités. Elle généralise la notion de droite, celle-ci étant une courbe particulière. Pour repérer un point sur une courbe seule est nécessaire l'abscisse curviligne.

Un plan est un espace topologique de dimension 2, d'extension infinie et sans courbure. C'est un objet mathématique primitif. Le plan est l'analogue en deux dimensions à la droite. Une surface est un espace topologique de dimension 2. Elle généralise le plan, celui-ci étant une surface particulière.

1.2 Géodésiques d'un espace

Les *géodésiques* sont la généralisation des droites aux espaces courbes de dimension quelconque. Ce sont les courbes de courbure minimale, elles possèdent la même courbure locale (au voisinage immédiat de chacun de leur point) que l'espace lui-même. Sur un plan leur courbure est nulle, ce sont des droites. On réserve le terme « droite » aux espaces plats, sans courbure intrinsèque. Un arc de géodésique est aussi une géodésique. Les arcs de courbes qui minimisent la distance entre deux points, appelées *orthodromies*, sont des géodésiques mais la réciproque est fausse. Sur une sphère les grands cercles et les arcs de grands cercles sont des géodésiques. Prenons deux points sur un grand cercle. S'ils ne sont pas antipodaux ils définissent un petit arc et un grand arc de grand cercle, qui sont tous les deux des géodésiques. Pour se représenter une géodésique sur une surface quelconque on peut imaginer un ruban pas trop large que l'on colle au mieux (avec un minimum de pliures) sur la surface.

Si l'on sait tracer des géodésiques et mesurer des angles (rapport de deux longueurs), une surface est plane ssi la somme des angles de tout triangle tracé à l'aide de géodésiques sur cette surface vaut π. On peut également utiliser la somme des angles d'un carré qui vaut 2π, ou l'aire de toute figure géométrique fermée, celle d'un disque de rayon r vaut πr^2, celle d'un carré de côté r vaut r^2, etc.

1.3 Plongement d'un espace

Bien qu'ayant une existence propre, les droites, les courbes, les plans et les surfaces sont habituellement représentés dans un espace de dimension supérieure. Les courbes sont représentées dans le plan ou dans l'espace (à 3 dimensions), les plans et les surfaces dans l'espace. S'il aide à se faire une image mentale, ce plongement n'a aucune nécessité. Les espaces topologiques ont une existence propre sans plongement dans un espace de dimension supérieure, sans quoi ce dernier devrait à son tour être plongé dans un espace de dimension plus grande, et ainsi de suite.

1.4 Courbure

Il est important de distinguer la courbure intrinséque et la courbure extrinsèque. Le cylindre et le cône sont des espaces topologiques plats, ils peuvent être déroulés pour en faire un plan et ont même topologie que le plan. Ils ont une courbure extrinsèque mais n'ont pas de courbure intrinsèque (qui leur est propre). En restant à la surface d'un cylindre ou d'un cône rien ne permet de mettre en évidence une quelconque courbure locale. La somme des angles d'un triangle tracé sur un cylindre ou un cône vaut π. En revanche, la courbure globale apparait lorsque en avançant perpendiculairement à la génératrice du cylindre l'on revient sur nos pas. Dans les cas du cylindre et du cône la courbure globale est liée à leur seule courbure extrinsèque. Seule la courbure intrinsèque est utile en géométrie, la courbure extrinsèque est de moindre importance, elle est liée au plongement de la surface dans un espace de dimension supérieure.

1.4.1 Courbure positive

La sphère est un espace topologique courbe, sa courbure intrinsèque fait que l'on ne peut la déplier sans déformations pour en faire un plan. Sa courbure constante positive est mise en évidence en mesurant la somme des angles d'un *triangle sphérique*, triangle dont les côtés sont des arcs de grands cercles, elle est comprise entre π et 3π. De même, l'aire du triangle sphérique est supérieure à celle d'un triangle plat. Dans le cas de la sphère la courbure globale est liée à la courbure intrinsèque.

1.4.2 Courbure négative

La selle de cheval a aussi une courbure intrinsèque, négative et non constante, elle tend vers zéro à mesure que l'on s'éloigne du siège. A noter qu'une surface de coubure négative constante ne peut être réalisée dans l'espace ordinaire à trois dimensions. La somme des angles d'un *triangle hyperbolique*, triangle dont les côtés sont des géodésiques, est inférieure à π, et l'aire du triangle hyperbolique est inférieure à celle d'un triangle plat.

2 Notation indicielle

2.1 Convention de sommation

En notation indicielle les coordonnées x, y, z, sont notées x^1, x^2, x^3. Cette notation permet d'adopter la *convention de sommation* suivante :

Notation 1. *Toutes les fois que dans un monôme (expression de la forme ax^n) figure le même indice en haut et en bas, nous devons sommer tous les monômes obtenus en donnant à cet indice toutes les valeurs possibles.*

Exemple 2.1.1. *La différentielle totale de la fonction $f(x, y, z)$ exprimée dans le système de coordonnée (x, y, z), s'écrit sous forme indicielle avec la convention de sommation :*

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}\,dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\,dx^3 \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i}\,dx^i \end{aligned}$$

où l'indice latin i varie de 1 *à* 3.

Notation 2. *Lorsqu'aucune confusion n'est possible sur les coordonnées employées, la dérivée partielle première par rapport à la i^e variable d'une fonction f quelconque est aussi notée*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv \partial_i f$$

ou bien simplement avec une virgule et un indice inférieur :

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv f_{,i}$$

Un indice en haut d'une lettre au numérateur est équivalent à un indice en bas d'une lettre au dénominateur. La dérivée partielle seconde est notée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} &\equiv \partial_{ij} f \\ &\equiv f_{,ij} \end{aligned}$$

Pour un système de coordonnées primé, nous mettrons le prime sur l'indice,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x^{i'}} &\equiv \partial_{i'} f \\ &\equiv f_{,i'}\end{aligned}$$

bien qu'il ne s'agisse pas de l'indice i' mais de la i ème coordonnée x'. Cette notation permet au symbole $\partial_{i'}$ d'indiquer une dérivation partielle par rapport à la i ème coordonnée de la base primée.

Exemple 2.1.2. *La différentielle totale de la fonction $g(t', x', y', z')$ exprimée dans le référentiel (t', x', y', z'), s'écrit sous forme indicielle avec la convention de sommation :*

$$\begin{aligned}dg &= \frac{\partial g}{\partial t}\,dt' + \frac{\partial g}{\partial x'}\,dx' + \frac{\partial g}{\partial y'}\,dy' + \frac{\partial g}{\partial z'}\,dz' \\ &= \frac{\partial g}{\partial x'^0}\,dx'^0 + \frac{\partial g}{\partial x'^1}\,dx'^1 + \frac{\partial g}{\partial x'^2}\,dx'^2 + \frac{\partial g}{\partial x'}\,dx'^3 \\ &= \partial_{\mu'} g\, dx^{\mu'} \\ &= g_{,\mu'} dx^{\mu'}\end{aligned}$$

où l'indice grec μ varie de 0 à 3.

2.2 Quelques identités

En notation indicielle la matrice colonne $[u]$ est notée u^i, la matrice carrée $[a]$ est notée a_{ij}.

Remarque 1. *Parler de la matrice u^i est un abus de langage pour parler de la matrice $[u]$ dont les composantes sont les u^i, de même pour la matrice a_{ij}.*

$$\forall j = 1, 2, 3 \quad a_{ij}u^j \triangleq a_{i1}u^1 + a_{i2}u^2 + a_{i3}u^3$$

où le symbole $\triangleq$ signifie « par définition », dans le cas présent par définition de la notation employée.

(1) Lorsque la matrice $[a_{ij}]$ est non symétrique ($a_{ij} \neq a_{ji}$), nous avons

$$a_{ij}u^i v^j \equiv a_{ij}v^j u^i \qquad \text{et} \qquad a_{ij}u^i v^j \equiv a_{ji}u^j v^i$$

où $\equiv$ est le symbole d'équivalence, et les inégalités :

$$a_{ij}u^i v^j \neq a_{ij}u^j v^i \qquad \text{et} \qquad a_{ij}u^i v^j \neq a_{ji}u^i v^j \tag{1}$$

Par exemple

$$\forall i, j = 1, 2 \quad \begin{cases} a_{ij}u^i v^j \triangleq a_{11}u^1v^1 + a_{12}u^1v^2 + a_{21}u^2v^1 + a_{22}u^2v^2 \\ a_{ij}u^j v^i \triangleq a_{11}u^1v^1 + a_{12}u^2v^1 + a_{21}u^1v^2 + a_{22}u^2v^2 \end{cases}$$

À partir des inégalités (1) on déduit :

$$(a_{ij} + a_{ji})u^i v^j \neq 2a_{ij}u^i v^j$$

(2) En posant $z^j = u^j + v^j$:

$$\begin{aligned} a_{ij}(u^j + v^j) &\equiv a_{ij}u^j + a_{ij}v^j \\ a_{ij}(z^j) &= a_{ij}u^j + a_{ij}v^j \end{aligned}$$

(3) Avec $u^i u^j \equiv u^j u^i$:

$$\begin{cases} (a_{ij} + a_{ji})u^i u^j \equiv 2a_{ij}u^i u^j \\ (a_{ij} - a_{ji})u^i u^j \equiv 0 \end{cases}$$

2.3 Symbole de Kronecker

Définition 2.3.1. *Symbole de Kronecker δ_{ij}*
Il est défini par :

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 \text{ pour } i = j, \text{ donc } \delta_{ii} = 1 \\ \delta_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j \end{cases}$$

Il permet d'utiliser la convention de sommation sur les indices répétés.

Exemple 2.3.1.

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \cdots + (dx^n)^2 \\ &= \delta_{ij}dx^i dx^j \qquad i, j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Les indices du symbole de Kronecker sont en bas pour respecter la convention de sommation. C'est aussi un opérateur de substitution d'indice :

Exemple 2.3.2. *Soit (x^i) un système de coordonnées :*

$$\begin{aligned} \forall i \quad x^i &= 0 \times x^1 + 0 \times x^2 + \cdots + 1 \times x^i + \cdots + 0 \times x^n \\ &= \delta_{ij}x^j \end{aligned}$$

Exemple 2.3.3. *Soit (x^i) un système de coordonnées :*

$$\begin{cases} \forall i = j \quad \dfrac{\partial x^i}{\partial x^j} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^i} = 1 \\ \forall i \neq j \quad \dfrac{\partial x^i}{\partial x^j} = 0 \quad \text{car } x^i \text{ et } x^j \text{ sont indépendants} \end{cases} \Rightarrow \qquad \forall i, j \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_{ij}$$

Exemple 2.3.4. *Soient (x^i) et (y^j) deux systèmes de coordonnées. Les n fonctions*

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad x^i = x^i\left(y^1, y^2, \ldots, y^n\right)$$

sont supposées au moins de classe C^2 : les dérivées partielles secondes existent et sont continues, donc a fortiori les dérivées partielles premières. Elles sont aussi supposées indépendantes de sorte que l'on puisse résoudre les n équations en fonction des x^i,

$$\forall j = 1, \ldots, n \quad y^j = y^j\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$$

qui sont alors aussi de classe C^2. D'une part :

$$\begin{aligned} \forall i \quad dx^i &= \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^j} dx^j \end{aligned} \tag{2}$$

D'autre part, avec l'exemple précédent ou en différentiant le résultat de l'exemple 2.3.2 :

$$\forall i \quad dx^i = \delta_{ij} dx^j$$

Avec les deux égalités précédentes :

$$\boxed{\forall i, j \quad \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^j} = \delta_{ij}} \tag{3}$$

Notez que si l'on pose $i = j$ la somme sur k disparait dans (2), et (3) donne bien $\delta_{ii} = 1$.

2.4 Symbole d'antisymétrie

Définition 2.4.1. *Symbole d'antisymétrie*
Le symbole d'antisymétrie ε^{ij} ou ε_{ij} ou ε_i^j est défini par :

$$\begin{cases} \varepsilon^{ij} = 0 \textit{ pour } i = j = 1, 2 \\ \varepsilon^{ij} = +1 \textit{ pour } i = 1 \textit{ et } j = 2 \\ \varepsilon^{ij} = -1 \textit{ pour } i = 2 \textit{ et } j = 1 \end{cases}$$

Le symbole est bien antisymétrique :

$$\varepsilon^{ij} = -\varepsilon^{ji}$$

Exemple 2.4.1. *Grâce au symbole d'antisymétrie, le déterminant d'une matrice s'écrit :*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} &= a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 \\ &= \varepsilon^{ij} a_i^1 a_j^2 \end{aligned}$$

On généralise ce symbole à un nombre quelconque d'indice, par exemple 3 :

$$\begin{cases} \varepsilon^{ijk} = 0 \text{ si deux indices ont même valeur} \\ \varepsilon^{ijk} = +1 \text{ si les indices sont dans l'ordre 1,2,3 ou si le nombre de permutations est pair} \\ \varepsilon^{ijk} = -1 \text{ si le nombre de permutations est impair} \end{cases}$$

Exemple 2.4.2.

$$\varepsilon^{112} = \varepsilon^{133} = \varepsilon^{212} = \cdots = 0$$
$$\varepsilon^{123} = \varepsilon^{312} = \varepsilon^{231} = \cdots = 1$$
$$\varepsilon^{132} = \varepsilon^{321} = \varepsilon^{213} = \cdots = -1$$

On vérifie que pour trois indices on a :

$$\varepsilon^{ijk} = \tfrac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$$

3

Vecteurs

Historiquement, les vecteurs modélisèrent d'abord des notions issues de la mécanique classique, principalement celles de force et de vitesse.

3.1 Représentation géométrique

NOTATION 3. *Les vecteurs sont notés par des lettres droites en caractère gras, par exemple* $\mathbf{f}$ *pour la force, ou par des lettres surmontées d'une flèche* $\vec{f}$.

Dans l'espace physique, représenté par l'espace à trois dimensions de la géométrie classique, les vecteurs forces sont représentés par une flèche ayant une longueur proportionnelle à l'intensité (ou magnitude) de la force, une direction et un sens qui sont celui de la force, et ayant pour origine le point d'application de la force.

3.1.1 Lois de composition géométriques

En accord avec la notion physique de force qu'ils modélisent, on définit sur les vecteurs les deux opérations suivantes, appelées *lois de composition* :

(1) L'addition de deux vecteurs ayant même origine donne un vecteur

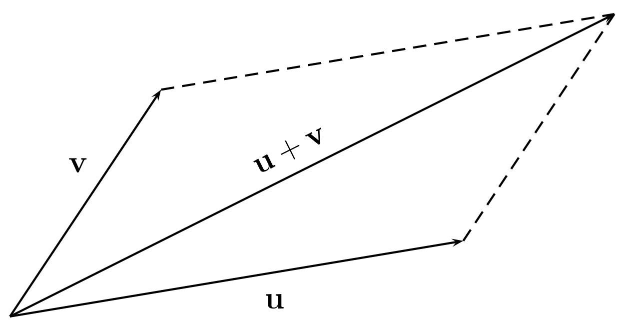
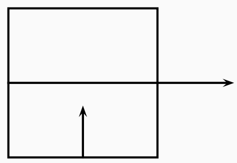


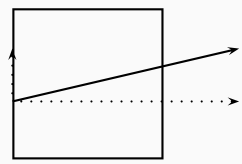
FIG. 3.1 – Addition des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$

C'est la règle du parallélogramme pour la composition des forces ayant même point d'application. De même que la somme de deux forces est une force, la somme de deux vecteurs est un vecteur. Pour additionner deux forces nous devons les rapporter à la même origine. De même, nous n'additionnerons que des vecteurs ayant même origine et la théorie des espaces vectoriels sera construite sous cette hypothèse.

Exemple 3.1.1. *Imaginons un cube homogène vu de dessus sur lequel on exerce deux forces perpendiculaires aux faces :*



En négligeant les frottements, sous l'action de ces deux forces le cube se déplace en translation. Pour sommer ces deux forces en une unique force nous les translatons pour qu'elles aient même origine. Pour que le cube ait un mouvement de translation sans rotation, la force résultante doit passer par le centre de gravité du cube. On en déduit le point d'application de cette force.



Nous parlons de vecteur lié (à un point) lorsque le point d'application du vecteur est spécifié, de vecteur libre lorsque ce point n'est pas spécifié.

(2) La multiplication d'un vecteur par un nombre réel donne un vecteur

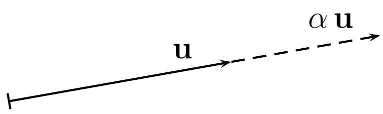


Fig. 3.2 – Multiplication du vecteur $\mathbf{u}$ par le nombre réel α

Le vecteur obtenu est homothétique au vecteur de départ, il a même direction, il est de même sens si $\alpha > 0$ et de sens contraire si $\alpha < 0$, et sa longueur est multipliée par $|\alpha|$. De même qu'une force dont l'intensié varie reste une force, la multiplication d'un vecteur par un réel est un vecteur.

Ces deux lois peuvent s'appliquer en une seule fois :

Définition 3.1.1. *Soient α et β deux nombres réels, le vecteur $\mathbf{w}$ tel que*

$$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$$

est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. α et β sont les coefficients de la combinaison linéaire.

Notons que la vitesse est aussi un vecteur, et que la combinaison linéaire de deux forces donne toujours une force et jamais une vitesse. Il faudra donc toujours préciser à quel ensemble de vecteurs, c'est-à-dire à quel *espace vectoriel* appartient le vecteur dont on parle.

Les objets mathématiques qui modélisent la physique doivent être des objets géométriques, c'est-à-dire indépendants du système de coordonnées dans lequel on les exprime. Lorsqu'une propriété physique est définie en un point par un seul nombre indépendant du système de coordonnées, nous parlerons de *scalaire*, par exemple la température et la masse volumique sont des scalaires. Si en chaque point d'un espace on associe une propriété alors on parle de *champ*, par exemple la température est un champ de scalaires. Lorsque dans un espace de dimension 3 une propriété physique est définie en un point par un ensemble de trois nombres indépendant du système de coordonnées, nous parlerons de *vecteur*, et de champ de vecteur si on définit un vecteur en chaque point de cet espace. Par exemple le champ de vecteurs vitesse du vent. Lorsqu'une propriété physique est définie en un point par un ensemble de plus de trois nombres indépendant du système de coordonnées, nous parlerons de *tenseur*, et de champ de tenseur si on définit un tenseur en chaque point de cet espace..

3.1.2 Propriétés des lois de composition

Dans ce qui suit nous notons $\oplus$ l'addition vectorielle pour la distinguer de l'addition des réels, et $\odot$ la multiplication d'un vecteur par un réel pour la distinguer de la multiplication des réels.

Supposons que nous ayons un ensemble d'éléments sur lesquels on puisse appliquer deux lois de composition. Ces éléments sont-ils des vecteurs ? Pour répondre il faut savoir si les deux lois sont identiques à celles que nous avons définies. Elles le seront si elles vérifient les mêmes propriétés, c'est-à-dire :

(1) *Addition de vecteurs.*

(a) Commutativité :

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$$

(b) Associativité :

$$\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \oplus \mathbf{w}$$

(c) Existence d'un élément neutre appelé vecteur nul et noté $\mathbf{0}$, tel que :

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

(d) Pour tout vecteur $\mathbf{u}$ il existe le vecteur opposé $\bar{\mathbf{u}}$, tel que :

$$\mathbf{u} \oplus (\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$$

L'existence d'un opposé nécessite donc l'existence d'un élément neutre. De plus on définit la soustraction vectorielle comme étant l'addition vectorielle avec l'opposé :

$$\mathbf{u} \ominus \mathbf{v} = \mathbf{u} \oplus (\bar{\mathbf{v}})$$

On montre plus loin que $\bar{\mathbf{u}} = (-1) \odot \mathbf{u}$.

(2) *Multiplication par un réel.* $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

(a) Associativité :

$$\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}) = (\alpha \times \beta) \odot \mathbf{u}$$

Il s'agit ici d'un abus de langage, il n'y a pas associativité puisque le signe $\odot$ du membre de gauche de l'égalité est le signe opératoire de la multiplication d'un vecteur par un réel, alors que le signe $\times$ du membre de droite est celui de la multiplication dans $\mathbb{R}$.

(b) Distributivité par rapport à l'addition des réels :

$$(\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} = (\alpha \odot \mathbf{u}) \oplus (\beta \odot \mathbf{u})$$

Il s'agit ici aussi d'un abus de langage, il n'y a pas distributivité puisque le signe $+$ du membre de gauche est le signe opératoire de l'addition dans $\mathbb{R}$, alors que le signe $\oplus$ du membre de droite est celui de l'addition vectorielle.

(c) Distributivité par rapport à l'addition des vecteurs :

$$\alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = (\alpha \odot \mathbf{u}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{v})$$

(d) Existence d'un élément neutre, le réel 1, tel que :

$$1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

3.1.3 Quelques propriétés

Soient $\mathbf{u}$ un vecteur et k un réel :

(1) $0 \odot \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Démonstration.

$$\begin{aligned}(0+0) \odot \mathbf{u} &= 0 \odot \mathbf{u}\\ 0 \odot \mathbf{u} + 0 \odot \mathbf{u} &= 0 \odot \mathbf{u} + \mathbf{0}\\ 0 \odot \mathbf{u} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

□

(2) $k \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Démonstration.

$$\begin{aligned}k \odot (\mathbf{0} \oplus \mathbf{0}) &= k \odot \mathbf{0}\\ k \odot \mathbf{0} \oplus k \odot \mathbf{0} &= k \odot \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}\\ k \odot \mathbf{0} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

□

(3) $\bar{\mathbf{u}} = (-1) \odot \mathbf{u}$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= 0 \odot \mathbf{u}\\ k \odot \mathbf{0} &= (k-k) \odot \mathbf{u}\\ k \odot (\mathbf{u} \oplus \bar{\mathbf{u}}) &= [k + (-k)] \odot \mathbf{u}\\ k \odot \mathbf{u} \oplus k \odot \bar{\mathbf{u}} &= k \odot \mathbf{u} \oplus (-k) \odot \mathbf{u}\\ k \odot \bar{\mathbf{u}} &= (-k) \odot \mathbf{u}\\ 1 \odot \bar{\mathbf{u}} &= (-1) \odot \mathbf{u}\\ \bar{\mathbf{u}} &= (-1) \odot \mathbf{u}\end{aligned}$$

□

(4) Si $k \odot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ alors $k = 0$ ou $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Démonstration. Supposons $k = 0$:

$$0 \odot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Supposons $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} k \odot \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ k^{-1} \odot (k \odot \mathbf{u}) &= k^{-1} \odot \mathbf{0} \\ (k^{-1}k) \odot \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

□

3.1.4 Définitions mathématiques

Définition 3.1.2. *Espaces vectoriels, vecteurs*
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif (le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$), dont les éléments sont appelés scalaires. Considérons un ensemble non vide $\mathscr{E}$ d'éléments notés $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots$ Supposons qu'il existe entre les éléments de $\mathscr{E}$ une loi de composition interne (une application de $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$), notée $\oplus$, et une loi de composition externe à gauche sur $\mathscr{E}$ de domaine $\mathbb{K}$ (une application de $\mathbb{K} \times \mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$), notée $\odot$, telles que :

(1) À deux éléments $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de $\mathscr{E}$, la loi $\oplus$ fasse correspondre un élément $\mathbf{w}$ de $\mathscr{E}$, noté $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$. En outre, la loi $\oplus$ possède les propriétés $(1)(a)$, $(1)(b)$, $(1)(c)$ et $(1)(d)$ que nous venons de voir.

(2) À un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ et à un élément $\mathbf{u}$ de $\mathscr{E}$, la loi $\odot$ fasse correspondre un élément de $\mathscr{E}$, noté $\alpha \odot \mathbf{u}$. En outre, pour $\beta \in \mathbb{K}$, la loi $\odot$ possède les propriétés $(2)(a)$, $(2)(b)$, $(2)(c)$ et $(2)(d)$ que nous venons de voir.

Les éléments $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots$ sont appelés des vecteurs. La loi $\oplus$ est appelée addition vectorielle, et la loi $\odot$ multiplication par un scalaire. $(\mathscr{E}, \oplus, \odot)$ noté E, est appelé espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\mathscr{E}$ est le support de l'espace vectoriel et les lois de composition constituent une structure pour $\mathscr{E}$.

Les quatre premiers axiomes se résument en disant que $(\mathscr{E}, \oplus)$ est un groupe abélien (ou commutatif) par rapport à l'addition vectorielle. Les quatre axiomes suivants définissent « l'action » du corps $\mathbb{K}$ sur l'ensemble $\mathscr{E}$.

Pour simplifier l'écriture, l'addition vectorielle $\oplus$ est souvent notée $+$ par analogie avec l'addition des scalaires. De même, la multiplication par un scalaire $\odot$ est souvent notée $\times$, ou encore on pourra omettre le symbole, par analogie avec la multiplication des scalaires. Par convention, la loi $\odot$ est prioritaire sur la loi $\oplus$.

Si la seconde loi est définie pour tout nombre réel α, nous dirons que l'ensemble $\mathscr{E}$ muni des deux lois $\oplus$ et $\odot$ est un espace vectoriel sur l'ensemble des nombres réels, ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel, ou encore espace vectoriel réel. Si la seconde loi est définie pour tout nombre complexe α, nous dirons que l'ensemble $\mathscr{E}$ muni des deux lois $\oplus$ et $\odot$ est un espace vectoriel sur l'ensemble des nombres complexes, ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel, ou encore espace vectoriel complexe.

Dans ce qui suit nous nous limiterons aux espaces vectoriels sur l'ensemble des nombres réels.

3.2 Représentation algébrique

Pour effectuer des calculs sur les vecteurs, par exemple en trois dimensions, on dote l'espace ponctuel d'un système de coordonnées (O, x, y, z), c'est-à-dire d'un point origine O et, dans le cadre de la physique classique, d'un système de coordonnées habituellement rectangulaire (x, y, z), comme définis au paragraphe 7 p. 55.

À l'aide des points de cet espace ponctuel, on peut construire des vecteurs de la façon suivante. À chaque point $A = (x_A, y_A, z_A)$ de l'espace ponctuel on associe le vecteur $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{OA}$, et à chaque vecteur $\boldsymbol{a}$ on associe le point A tel que $\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{a}$. Ainsi en généralisant à n dimensions, il existe une bijection φ entre l'espace ponctuel $\mathcal{E}_n$ et l'espace vectoriel E_n, ils sont « équipotents » :

$$\begin{aligned} \varphi \ : \quad & \mathbf{a} \in E_n \mapsto A = \varphi(\mathbf{a}) \in \mathcal{E}_n \\ & \mathbf{0} \in E_n \mapsto O = \varphi(\mathbf{0}) \in \mathcal{E}_n \end{aligned}$$

Définition 3.2.1. *Espace ponctuel*
Soit $\mathcal{E}$ un ensemble d'éléments appelés points et notés $A, B, C, \ldots$ Supposons qu'à tout couple (A, B) de points de $\mathcal{E}$ pris dans cet ordre, on fasse correspondre un vecteur, noté $\boldsymbol{AB}$, la correspondance suivant les trois axiomes :

(1) $\boldsymbol{AB} = -\boldsymbol{BA}$

(2) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{CB}$

(3) $\forall O \in \mathcal{E},\ \forall \mathbf{u} \in E_n,\ \exists!\, M \in \mathcal{E},$ *tel que* $\boldsymbol{OM} = \mathbf{u}$

Nous dirons que l'ensemble $\mathcal{E}$ constitue un espace ponctuel à n dimensions, noté $\mathcal{E}_n$. L'espace vectoriel E_n est appelé espace associé à $\mathcal{E}_n$.

L'ensemble des points correspondant aux valeurs des n coordonnées dans un certain domaine, constitue le support d'un espace ponctuel à n dimensions. Pour obtenir un espace ponctuel, il faut structurer cet ensemble en ajoutant la correspondance que nous venons d'énoncer.

Si les axes de coordonnées portent la même unité on parle *d'espace métrique* car on peut y définir une *distance* ou *métrique*. Dans le cas contraire on parle d'espace affine. Par exemple en thermodynamique l'espace de Clapeyron (P, V) est un espace affine car on ne peut y définir une distance.

Par abus de langage nous dirons que A est l'origine du vecteur $\boldsymbol{AB}$, et B son extrémité. Les coordonnées des points A et B définissent le vecteur $\boldsymbol{AB}$. Dans un espace à trois dimensions, ce vecteur est associé à un ensemble de six nombres réels ordonnés $(x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B)$. Nous dirons que ce vecteur est *lié* à son point origine A. Cependant, il n'est pas utile de conserver le point origine dans la définition des vecteurs, les vecteurs seront des fonctions des coordonnées du point origine. Les vecteurs que nous utilisons sont *libres*, ils n'ont pas de point d'application spécifié.

En utilisant les axiomes 1 et 2 :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= \boldsymbol{AO} + \boldsymbol{OB} \\ &= \boldsymbol{OB} - \boldsymbol{OA} \end{aligned}$$

Dans un espace à trois dimensions, on associe au vecteur $\boldsymbol{AB}$ les trois nombres réels ordonnés $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$, qui sont les coordonnées du point à son extrémité.

Les vecteurs ont une existence propre indépendante du système de coordonnées. En effet, ils modélisent la réalité alors que le choix d'un système de coordonnées est toujours arbitraire. Les coordonnées du point à l'extrémité d'un vecteur dépendent du système de coordonnées choisi et ont par conséquent le même arbitraire. Par exemple, une force exercée ne dépend pas du système de coordonnées utilisé pour définir le vecteur qui modélise cette force.

EXEMPLE 3.2.1. *Vecteur force $\boldsymbol{f}$ dans le système de coordonnées (O, x, y, z) :*

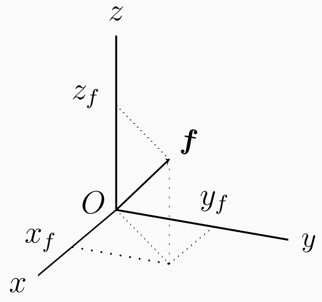


FIG. 3.3 – Coordonnées du vecteur force $\boldsymbol{f}$

Dans le système de coordonnées (O, x, y, z), le point à l'extrémité du vecteur $\boldsymbol{f}$ a pour coordonnées (x_f, y_f, z_f). Par abus de langage on parle des coordonnées d'un vecteur pour parler des coordonnées du point à son extrémité.

NOTATION 4. *Nous utiliserons la notation indicielle pour les axes et pour les coordonnées :*

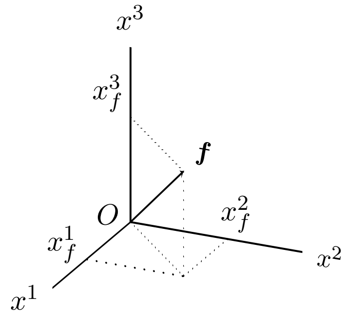


FIG. 3.4 – Notation indicielle

Dans le système de coordonnées (O, x^1, x^2, x^3), le point à l'extrémité du vecteur $\boldsymbol{f}$ a pour coordonnées (x^1_f, x^2_f, x^3_f).

3.2.1 Base vectorielle

Nous sommes passés par les coordonnées d'un point pour traiter de vecteurs mais nous pouvons nous abstraire momentanément de la notion de point. En effet, à chaque système de coordonnées, qu'il soit rectiligne ou curviligne, orthogonal ou non, nous pouvons associer au plus deux bases vectorielles :

— En plaçant un vecteur de base tangent à chaque ligne de coordonnées

— En plaçant un vecteur de base perpendiculaire à chaque hypersurface de coordonnées

Ces deux bases sont dites *réciproques* (voir le paragraphe 13.5 p. 115). Nous appellerons « base tangente » la première de ces bases, et « base réciproque » la base perpendiculaire aux hypersurfaces de coordonnées. Tous les vecteurs peuvent s'écrire d'une manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de l'une de ces deux bases.

Exemple 3.2.2. *Soient* $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ *les vecteurs de base unitaires (d'intensité un newton) deux à deux orthogonaux de l'espace vectoriel des forces de la physique classique non relativiste. Le vecteur force* $\boldsymbol{f}$ *s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de ces trois vecteurs force* $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ *:*

$$\boldsymbol{f} = f^1\mathbf{i} + f^2\mathbf{j} + f^3\mathbf{k}$$

Les vecteurs $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ *forment la base orthonormée* $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ *dite base canonique, signifiant ici « la plus simple ». Toute autre base sera définie par rapport à la base canonique.*

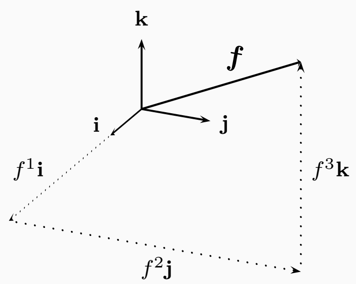


Fig. 3.5 – La force $\boldsymbol{f}$ comme combinaison linéaire des vecteurs force $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

Elle préexiste donc, souvent de façon implicite, à toute autre base. Une fois posée, nous pouvons nous abstraire du système de coordonnées (rectangulaires). Nous dirons que le vecteur force $\boldsymbol{f}$ *se décompose dans la base unitaire* $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ *de l'espace des forces, et que les nombres* f^1, f^2 *et* f^3 *sont les composantes du vecteur force* $\boldsymbol{f}$ *dans cette base.*

Exemple 3.2.3. *En coordonnées polaires les lignes de coordonnée* $\rho = c^{ste}$ *sont des cercles centrés sur l'origine. Les lignes de coordonnée* $\theta = c^{ste}$ *sont des demi-droites issues de l'origine.*

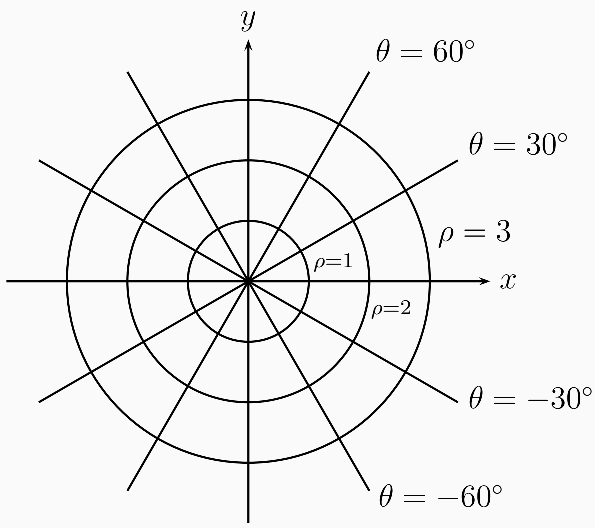


Fig. 3.6 – Lignes de coordonnées polaires

Les vecteurs unitaires de la base polaire sont construits tangentiellement aux lignes de coordonnées polaires.

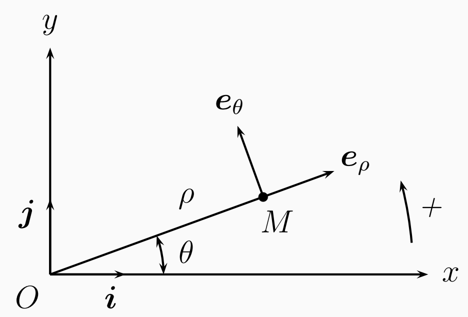


FIG. 3.7 – Vecteurs unitaires de la base polaire

DÉFINITION 3.2.2. *Composantes d'un vecteur*
Tout vecteur se décompose de façon unique dans une base, sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de base. Les coefficients de cette combinaison linéaire sont appelés les composantes du vecteur dans cette base.

REMARQUE 2. *On trouve parfois le terme de « coordonnées » d'un vecteur dans une base à la place de « composantes ». Nous ferons la distinction et parlerons de coordonnées pour un point dans un système de coordonnées.*

REMARQUE 3. *Les vecteurs forces, positions, vitesses, accélérations, champs électriques, etc. appartiennent à des espaces vectoriels différents, munis chacun d'une base vectorielle. En physique nous ramenons tous ces vecteurs dans le même espace vectoriel, avec une unique base. Ce faisant, nous procédons à l'assimilation d'espaces isomorphes à l'un d'entre eux.*

NOTATION 5. *En notation indicielle les vecteurs de base sont notés avec un indice en bas :*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} &= f^1\mathbf{e}_1 + f^2\mathbf{e}_2 + f^3\mathbf{e}_3 \\ &= \sum_{i=1}^{3} f^i\mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Il faut s'assurer que les vecteurs que l'on utilise pour former une base sont linéairement indépendants, c'est-à-dire tels que l'on ne puisse pas exprimer un vecteur en fonction des autres car il serait redondant.

DÉFINITION 3.2.3. *Famille de vecteurs linéairement indépendants d'ordre p*
Soient $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$ une famille de p vecteurs non nuls d'un espace vectoriel E. Ces vecteurs forment un système linéairement indépendant d'ordre p, ou encore une famille libre d'ordre p, s'il est impossible de trouver p nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ non tous nuls, tels que :

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_p\mathbf{u}_p = \mathbf{0} \tag{4}$$

Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite liée.

Remarque 4. *Interprétation géométrique :*
Utilisons la représentation intuitive des vecteurs par des flèches. Un ensemble de vecteurs est linéairement indépendant s'il n'est pas possible de construire une figure fermée avec deux ou plusieurs de ces vecteurs, même en ajustant leurs longueurs. Aucun vecteur de cet ensemble ne peut alors être exprimé comme combinaison linéaire des autres car chacun définit une nouvelle dimension.

Exemple 3.2.4. *Montrons que les vecteurs* $\mathbf{u}_1(a,0,0), \mathbf{u}_2(b,c,0), \mathbf{u}_3(0,0,d)$ *sont linéairement indépendants :*

$$\begin{aligned} \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 &= \mathbf{0} \\ \lambda_1\,(a,0,0) + \lambda_2\,(b,c,0) + \lambda_3\,(0,0,d) &= (0,0,0) \\ (\lambda_1 a + \lambda_2 b, \lambda_2 c, \lambda_3 d) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

La seule solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ *par conséquent les vecteurs sont linéairement indépendants.*

Il faut également s'assurer que la famille de vecteur que l'on a choisi pour former une base de l'espace vectoriel permet bien de générer tous les vecteurs de cet espace. Nous dirons que cette famille est *génératrice*, et que chaque vecteur de l'espace vectoriel se décompose sur les vecteurs de cette famille, ou encore que tout vecteur est une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

Définition 3.2.4. *Famille génératrice*
Soient $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ *une famille de* p *vecteurs non nuls d'un espace vectoriel* E*. Ces vecteurs forment une famille génératrice ssi*

$$\forall \mathbf{v} \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R} \ / \ \mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_p\mathbf{u}_p$$

Nous pouvons maintenant donner une définition précise de la notion de base :

Définition 3.2.5. *Base d'un espace vectoriel*
On appelle base d'un espace vectoriel E*, une famille libre et génératrice de* E*.*

Une définition alternative est possible. Dans un espace vectoriel le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants (c'est-à-dire l'ordre maximal d'après la définition 3.2.3 p. 19) est appelé dimension de cet espace. Par exemple pour une droite $n = 1$, pour un plan $n = 2$, pour un volume $n = 3$.

Définition 3.2.6. *Dimension d'un espace vectoriel*
L'ordre maximal d'un espace vectoriel est appelé dimension de cet espace vectoriel.

Notation 6. *Un espace vectoriel de dimension* n*, donc d'ordre maximal* n*, est noté* E_n*.* E_1 *est une droite vectorielle,* E_2 *est un plan vectoriel.*

DÉFINITION 3.2.7. *Base d'un espace vectoriel*
On appelle base d'un espace vectoriel, tout système libre de vecteurs d'ordre maximal.

NOTATION 7. *Soit un espace vectoriel E_n, sa base canonique est notée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ ou simplement $(\mathbf{e}_i)$.*

La décomposition d'un vecteur dans une base est unique. En effet, soient $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ une base de E_3 et $\mathbf{u}$ un vecteur de E_3. La base étant par définition génératrice de E_3 :

$$\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3$$

Supposons l'existence d'une autre décomposition

$$\mathbf{u} = \mathrm{u}^1\mathbf{e}_1 + \mathrm{u}^2\mathbf{e}_2 + \mathrm{u}^3\mathbf{e}_3$$

alors par soustraction :

$$\left(u^1 - \mathrm{u}^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(u^2 - \mathrm{u}^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(u^3 - \mathrm{u}^3\right)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$$

La base étant libre par définition :

$$u^1 = \mathrm{u}^1, \qquad u^2 = \mathrm{u}^2, \qquad u^3 = \mathrm{u}^3$$

La décomposition est donc unique.

Il n'existe pas de base globale lorsque le système de coordonnées est curviligne. Il est alors naturel d'utiliser les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées pour définir une base locale en chaque point.

3.2.2 Base et repère naturels

DÉFINITION 3.2.8. *Base naturelle - Repère naturel*
Soit $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ un système de coordonnées quelconques, curvilignes ou rectilignes. En un point M, les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées définissent une base locale :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \mathbf{e}_i \triangleq \frac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial x^i}$$

$(\mathbf{e}_i)$ est la base naturelle du système de coordonnées (x_i) au point M, et $(M, \mathbf{e}_i)$ est le repère naturel au point M.

En coordonnées curvilignes les $\mathbf{e}_i$ forment un champ de vecteurs fonction de la position de la base. En général les vecteurs de la base naturelle ne sont pas de norme unité et n'ont pas la même dimension physique.

EXEMPLE 3.2.5. *Exprimons les vecteurs de la base naturelle polaire $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$ en fonction des vecteurs de la base rectangulaire $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$:*

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial \rho}\right)_\theta \\ \mathbf{e}_\theta = \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial \theta}\right)_\rho \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \dfrac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \dfrac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \mathbf{e}_\theta = \dfrac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \dfrac{\partial x}{\partial \rho}\,\mathbf{e}_x + \dfrac{\partial y}{\partial \rho}\,\mathbf{e}_y \\[2ex] \mathbf{e}_\theta = \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\,\mathbf{e}_x + \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\,\mathbf{e}_y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \cos(\theta)\,\mathbf{e}_x + \sin(\theta)\,\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\theta = -\rho\sin(\theta)\,\mathbf{e}_x + \rho\cos(\theta)\,\mathbf{e}_y \end{cases} \tag{5}$$

ρ ayant la dimension d'une longueur, les vecteurs $\mathbf{e}_\rho$ et $\mathbf{e}_\theta$ n'ont pas la même dimension. Il s'en suit que les composantes des vecteurs physiques exprimées dans la base naturelle ne sont pas des composantes physiques. Par exemple, dans la base naturelle polaire les composantes du vecteur vitesse ont pour dimensions m/s *et* s.
Sous forme matricielle, en utilisant la notation *2 p. 5* *pour la dérivation partielle :*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\theta \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{,\rho} & y_{,\rho} \\ x_{,\theta} & y_{,\theta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exprimons les vecteurs de la base rectangulaire en fonction de ceux de la base naturelle polaire :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x = \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial x}\right)_y \\[2ex] \mathbf{e}_y = \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial y}\right)_x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{e}_x = \dfrac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial \rho}\,\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \dfrac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial \theta}\,\dfrac{\partial \theta}{\partial x} \\[2ex] \mathbf{e}_y = \dfrac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial \rho}\,\dfrac{\partial \rho}{\partial y} + \dfrac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial \theta}\,\dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{e}_x = \dfrac{\partial \rho}{\partial x}\,\mathbf{e}_\rho + \dfrac{\partial \theta}{\partial x}\,\mathbf{e}_\theta \\[2ex] \mathbf{e}_y = \dfrac{\partial \rho}{\partial y}\,\mathbf{e}_\rho + \dfrac{\partial \theta}{\partial y}\,\mathbf{e}_\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{e}_x = \cos(\theta)\,\mathbf{e}_\rho - \dfrac{\sin(\theta)}{\rho}\,\mathbf{e}_\theta \\[2ex] \mathbf{e}_y = \sin(\theta)\,\mathbf{e}_\rho + \dfrac{\cos(\theta)}{\rho}\,\mathbf{e}_\theta \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \rho_{,x} & \theta_{,x} \\ \rho_{,y} & \theta_{,y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\frac{\sin(\theta)}{\rho} \\ \sin(\theta) & \frac{\cos(\theta)}{\rho} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Norme des vecteurs de la base naturelle polaire :

$$\begin{cases} \|\mathbf{e}_\rho\| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \\ \|\mathbf{e}_\theta\| = \sqrt{\rho^2\sin^2(\theta) + \rho^2\cos^2(\theta)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \|\mathbf{e}_\rho\| = 1 \\ \|\mathbf{e}_\theta\| = \rho \end{cases}$$

La base naturelle polaire n'est pas normée. En revanche elle est orthogonale :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\theta &= (\cos(\theta)\,\mathbf{e}_x + \sin(\theta)\,\mathbf{e}_y) \cdot (-\rho\sin(\theta)\,\mathbf{e}_x + \rho\cos(\theta)\,\mathbf{e}_y) \\ &= -\cos(\theta)\rho\sin(\theta) + \sin(\theta)\rho\cos(\theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exemple 3.2.6. *Vecteurs de la base naturelle en coordonnées cylindriques. Par analogie aux coordonnées polaires :*

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \cos(\phi)\,\mathbf{e}_x + \sin(\phi)\,\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\phi = -\rho\sin(\phi)\,\mathbf{e}_x + \rho\cos(\phi)\,\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\rho\sin(\phi) & \rho\cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}$$

La norme des vecteurs de la base naturelle en coordonnées cylindriques s'écrit

$$\begin{cases} \|\mathbf{e}_\rho\| = 1 \\ \|\mathbf{e}_\phi\| = \rho \\ \|\mathbf{e}_z\| = 1 \end{cases} \tag{6}$$

Exemple 3.2.7. *Vecteurs de la base naturelle en coordonnées sphériques. À partir de l'expression du vecteur position,*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{OM} &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \\ &= r\sin(\theta)\cos(\phi)\,\mathbf{e}_x + r\sin(\theta)\sin(\phi)\,\mathbf{e}_y + r\cos(\theta)\,\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

nous trouvons l'expression des vecteurs de la base naturelle :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \partial_r \boldsymbol{M} \\ \mathbf{e}_\theta = \partial_\theta \boldsymbol{M} \\ \mathbf{e}_\phi = \partial_\phi \boldsymbol{M} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_r = \sin(\theta)\cos(\phi)\,\mathbf{e}_x + \sin(\theta)\sin(\phi)\,\mathbf{e}_y + \cos(\theta)\,\mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta = r\cos(\theta)\cos(\phi)\,\mathbf{e}_x + r\cos(\theta)\sin(\phi)\,\mathbf{e}_y - r\sin(\theta)\,\mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\phi = -r\sin(\theta)\sin(\phi)\,\mathbf{e}_x + r\sin(\theta)\cos(\phi)\,\mathbf{e}_y \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta) \\ r\cos(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & -r\sin(\theta) \\ -r\sin(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}$$

La norme des vecteurs de la base naturelle en coordonnées sphériques s'écrit

$$\begin{cases} \|\mathbf{e}_r\| = \sqrt{\sin^2(\theta)\cos^2\phi + \sin^2(\theta)\sin^2\phi + \cos^2(\theta)} \\ \|\mathbf{e}_\theta\| = \sqrt{r^2\cos^2(\theta)\cos^2\phi + r^2\cos^2(\theta)\sin^2\phi + r^2\sin^2(\theta)} \\ \|\mathbf{e}_\phi\| = \sqrt{r^2\sin^2(\theta)\sin^2\phi + r^2\sin^2(\theta)\cos^2\phi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{e}_r\| = \sqrt{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)} \\ \|\mathbf{e}_\theta\| = \sqrt{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)} \\ \|\mathbf{e}_\phi\| = \sqrt{r^2\sin^2(\theta)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{e}_r\| = 1 \\ \|\mathbf{e}_\theta\| = r \\ \|\mathbf{e}_\phi\| = |r\sin(\theta)| \end{cases} \tag{8}$$

Exemple 3.2.8. *Les coordonnées galiléennes normales constituent un système de coordonnées rectangulaires pour l'espace de Minkowski, dont la base n'est pas normée. On obtient dans V_4 une base orthonormée si l'on substitue aux coordonnées galiléennes t, x, y, z les* *coordonnées galiléennes réduites :*

$$x^0 = ct, \qquad x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = z \tag{9}$$

Sauf précision contraire, on se placera toujours dans la base naturelle du système de coordonnées.

En annexe 27.3 p. 374, on montre l'existence de bases *non holonomiques* qui ne peuvent être la base naturelle d'aucun système de coordonnées.

3.2.3 Lois de compositions algébriques

On définit l'addition vectorielle des composantes et la multiplication des composantes d'un vecteur par un réel de sorte que l'on retrouve les résultats de la représentation géométrique.

(1) L'addition vectorielle consiste à additionner les composantes respectives des vecteurs :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} &= \left(u^1, u^2, u^3\right) \oplus \left(v^1, v^2, v^3\right) \\ &= \left(u^1 + v^1, u^2 + v^2, u^3 + v^3\right) \\ &= \left(w^1, w^2, w^3\right) \\ &= \mathbf{w}\end{aligned}$$

(2) La multiplication d'un vecteur par un réel α consiste à multiplier chaque composante par ce réel :

$$\begin{aligned}\alpha \odot \mathbf{u} &= \alpha \odot \left(u^1, u^2, u^3\right) \\ &= \left(\alpha u^1, \alpha u^2, \alpha u^3\right) \\ &= \left(v^1, v^2, v^3\right) \\ &= \mathbf{v}\end{aligned}$$

3.2.4 Propriétés des lois de composition

(1) *Addition vectorielle.* $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$,

(a) Commutativité :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} &= \left(u^1, u^2, u^3\right) \oplus \left(v^1, v^2, v^3\right) \\ &= \left(u^1 + v^1, u^2 + v^2, u^3 + v^3\right) \\ &= \left(v^1 + u^1, v^2 + u^2, v^3 + u^3\right) \\ &= \left(v^1, v^2, v^3\right) \oplus \left(u^1, u^2, u^3\right) \\ &= \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}\end{aligned}$$

(b) Associativité :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) &= \left(u^1, u^2, u^3\right) \oplus \left[\left(v^1, v^2, v^3\right) \oplus \left(w^1, w^2, w^3\right)\right] \\
&= \left(u^1, u^2, u^3\right) \oplus \left(v^1 + w^1, v^2 + w^2, v^3 + w^3\right) \\
&= \left(u^1 + v^1 + w^1, u^2 + v^2 + w^2, u^3 + v^3 + w^3\right) \\
&= \left(u^1 + v^1, u^2 + v^2, u^3 + v^3\right) \oplus \left(w^1, w^2, w^3\right) \\
&= \left[\left(u^1, u^2, u^3\right) \oplus \left(v^1, v^2, v^3\right)\right] \oplus \left(w^1, w^2, w^3\right) \\
&= (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} \\
&= \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \oplus \mathbf{w}
\end{aligned}$$

(c) Existence d'un élément neutre appelé vecteur nul et noté **0**, tel que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \oplus \mathbf{0} &= \left(u^1, u^2, u^3\right) \oplus (0, 0, 0) \\
&= \left(u^1 + 0, u^2 + 0, u^3 + 0\right) \\
&= \left(u^1, u^2, u^3\right) \\
&= \mathbf{u}
\end{aligned}$$

(d) Pour tout vecteur **u** il existe le vecteur opposé $-\mathbf{u}$, tel que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u}) &= \left(u^1, u^2, u^3\right) \oplus \left(-u^1, -u^2, -u^3\right) \\
&= \left(u^1 - u^1, u^2 - u^2, u^3 - u^3\right) \\
&= (0, 0, 0) \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

De plus on définit la soustraction vectorielle comme étant l'addition vectorielle avec l'opposé :

$$\mathbf{u} \ominus \mathbf{v} = \mathbf{u} \oplus (-\mathbf{v})$$

(2) *Multiplication par un réel.* $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

(a) Associativité :

$$\begin{aligned}
\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}) &= \alpha \odot \left[\beta \odot \left(u^1, u^2, u^3\right)\right] \\
&= \alpha \odot \left(\beta u^1, \beta u^2, \beta u^3\right) \\
&= \left(\alpha\beta u^1, \alpha\beta u^2, \alpha\beta u^3\right) \\
&= (\alpha \times \beta) \odot \left(u^1, u^2, u^3\right) \\
&= (\alpha \times \beta) \odot \mathbf{u}
\end{aligned}$$

(b) Distributivité par rapport à l'addition des réels :

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\odot\mathbf{u} &= (\alpha+\beta)\odot\left(u^1,u^2,u^3\right)\\ &= \left((\alpha+\beta)u^1,(\alpha+\beta)u^2,(\alpha+\beta)u^3\right)\\ &= \left(\alpha u^1+\beta u^1,\alpha u^2+\beta u^2,\alpha u^3+\beta u^3\right)\\ &= \left(\alpha u^1,\alpha u^2,\alpha u^3\right)\oplus\left(\beta u^1,\beta u^2,\beta u^3\right)\\ &= \left[\alpha\odot\left(u^1,u^2,u^3\right)\right]\oplus\left[\beta\odot\left(u^1,u^2,u^3\right)\right]\\ &= (\alpha\odot\mathbf{u})\oplus(\beta\odot\mathbf{u})\end{aligned}$$

(c) Distributivité par rapport à l'addition des vecteurs :

$$\begin{aligned}\alpha\odot(\mathbf{u}\oplus\mathbf{v}) &= \alpha\odot\left[\left(u^1,u^2,u^3\right)\oplus\left(v^1,v^2,v^3\right)\right]\\ &= \alpha\odot\left(u^1+v^1,u^2+v^2,u^3+v^3\right)\\ &= \left[\alpha\left(u^1+v^1\right),\alpha\left(u^2+v^2\right),\alpha\left(u^3+v^3\right)\right]\\ &= \left(\alpha u^1+\alpha v^1,\alpha u^2+\alpha v^2,\alpha u^3+\alpha v^3\right)\\ &= \left(\alpha u^1,\alpha u^2,\alpha u^3\right)\oplus\left(\alpha v^1,\alpha v^2,\alpha v^3\right)\\ &= \left[\alpha\odot\left(u^1,u^2,u^3\right)\right]\oplus\left[\alpha\odot\left(v^1,v^2,v^3\right)\right]\\ &= (\alpha\odot\mathbf{u})\oplus(\alpha\odot\mathbf{v})\end{aligned}$$

(d) Existence d'un élément neutre, le réel 1, tel que :

$$\begin{aligned}1\odot\mathbf{u} &= 1\odot\left(u^1,u^2,u^3\right)\\ &= \left(1u^1,1u^2,1u^3\right)\\ &= \left(u^1,u^2,u^3\right)\\ &= \mathbf{u}\end{aligned}$$

3.2.5 Composantes d'un vecteur

Pour introduire les vecteurs nous nous sommes servi d'objets *géométriques* représentés par une flèche, mais tous les vecteurs ne sont pas représentables par une flèche. Par exemple les matrices carrées d'ordre deux à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des vecteurs. En revanche, tout vecteur peut s'exprimer comme une liste ordonnée de nombres qui sont ses composantes dans une base.

D'après le paragraphe 3.2.1 p. 17, à partir d'un système de coordonnées rectilignes obliques, nous pouvons construire deux bases réciproques. Prenons l'une de ces deux bases, un vecteur peut y être projeté de deux façons : parallèlement ou perpendiculairement aux vecteurs de base.

- En projetant parallèlement on obtient les composantes *contravariantes* du vecteur
- En projetant perpendiculairement on obtient les composantes *covariantes* du vecteur

> Remarque 5. *Les composantes contravariantes dans une base sont égales aux composantes covariantes dans la base réciproque.*

Remarque 6. *Dans les bases orthonormées, les composantes contravariantes et covariantes sont confondues.*

Se donner une base et se donner des composantes (contravariantes ou covariantes) est équivalent à se donner un vecteur. Réciproquement, dans une base donnée tout vecteur peut se décomposer en composantes contravariantes ou en composantes covariantes. Un vecteur est donc la donnée d'une base et, de composantes contravariantes ou covariantes. Dans une base donnée, nous avons l'équivalence :

$$(u^1, u^2, u^3) \equiv (u_1, u_2, u_3)$$

Lorsque l'on décrit un vecteur en composantes covariantes on parle de *covecteur* ou *vecteur covariant* (voir paragraphe 11.5 p. 93). Ceci est un abus de langage, il n'existe qu'une seule sorte de vecteur, que l'on peut exprimer de deux façons différentes dans une base donnée.

Exemple 3.2.9. *Soit (x^1, x^2) un système de coordonnées rectilignes obliques dans lequel le point M a pour coordonnées (x^1_M, x^2_M).*

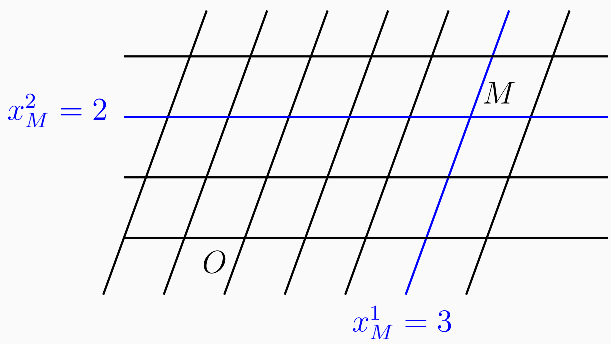


Fig. 3.8 – Système de coordonnées cartésiennes

À ce système de coordonnées nous associons le repère $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ tel que la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ soit normée et les vecteurs de base pris le long des droites de coordonnées.

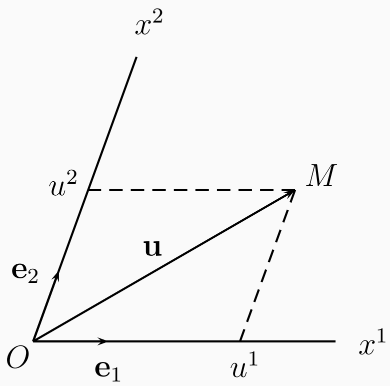


Fig. 3.9 – Composantes contravariantes du vecteur $\mathbf{u}$

Dans cette base, le vecteur $\mathbf{u} = \boldsymbol{OM}$ a pour composantes contravariantes u^1 et u^2 :

$$\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2$$

La base étant normée, $u^1 = x^1_M$ et $u^2 = x^2_M$.

DÉFINITION 3.2.9. *Composantes contravariantes*
Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ *une base d'un espace vectoriel* E_n*. On appelle composantes contravariantes du vecteur* $\mathbf{u}$ *dans cette base, les nombres* $u^1, u^2, \dots, u^n$ *tels que :*

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + \cdots + u^n\mathbf{e}_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} u^i\mathbf{e}_i\end{aligned}$$

En appliquant la convention de sommation le vecteur $\mathbf{u}$ s'écrit en composantes contravariantes,

$$\mathbf{u} = u^i\mathbf{e}_i$$

où l'indice i varie de 1 à n.

Les indices de sommation sont dits *muets*, nous pouvons les remplacer par d'autres lettres, par exemple :

$$u^i\mathbf{e}_i = u^j\mathbf{e}_j$$

Les autres indices sont dits *libres* ou *réels*.

Les composantes contravariantes sont représentées au moyen d'un indice supérieur. La décomposition d'un vecteur en composantes contravariantes est unique dans chaque base et les composantes contravariantes $(u^1, u^2, \dots, u^n)$ représentent un unique vecteur dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Les vecteurs ont une existence propre, il sont indépendants de la base dans laquelle on les exprime : leur norme, direction et sens ne varient pas par changement de base. Ils sont *invariants* par changement de base, seules leurs composantes changent. Pour assurer cette invariance, lorsqu'on les écrit sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de base, leurs composantes contravariantes (les coefficients) doivent se transformer de façon « contraire » aux vecteurs de base.

EXEMPLE 3.2.10. *Dans la base orthonormée* $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$*, soit* $\mathbf{u}$ *un vecteur de composantes* (x, y, z)*. Déterminons ses composantes contravariantes* (u^1, u^2, u^3) *dans la base* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *avec* $\mathbf{e}_1(a, 0, 0)$*,* $\mathbf{e}_2(b, c, 0)$*,* $\mathbf{e}_3(0, 0, d)$*.*

$$\begin{aligned}x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z &= u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3 \\ &= u^1a\mathbf{e}_x + u^2\left(b\mathbf{e}_x + c\mathbf{e}_y\right) + u^3d\mathbf{e}_z \\ &= \left(u^1a + u^2b\right)\mathbf{e}_x + u^2c\mathbf{e}_y + u^3d\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

si bien que :

$$\begin{cases} u^1a + u^2b = x \\ u^2c = y \\ u^3d = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u^2 = y/c \\ u^3 = z/d \\ u^1 = \left(x - by/c\right)/a \end{cases}$$

EXEMPLE 3.2.11. *Soit un point* M *de coordonnées* $(6, 2)$*. Les unités du système de coordonnées sont choisies arbitrairement. On considère la base orthogonale non normée* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ *telle que* $\|\mathbf{e}_1\| = 2$ *et* $\|\mathbf{e}_2\| = 1$*.*

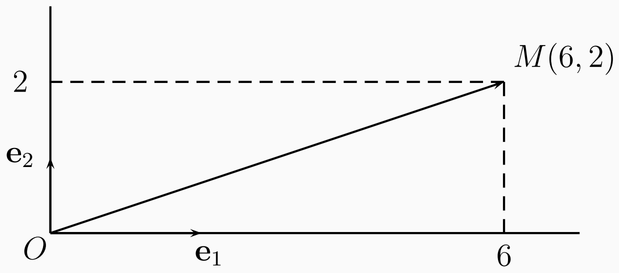


FIG. 3.10 – Coordonnées et composantes contravariantes

Dans cette base, nous avons :

$$\boldsymbol{OM} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$$

Les coordonnées $(6,2)$ *du point* M *et les composantes contravariantes* $(3,2)$ *du vecteur* $\boldsymbol{OM}$ *dans la base* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ *sont différentes. En coordonnées rectangulaires les vecteurs de base seront toujours normés, et nous choisirons les unités du système de coordonnées de sorte que les coordonnées et les composantes contravariantes soient confondues.*

REMARQUE 7. *Lorsque le système de coordonnées est curviligne, par exemple polaire, les vecteurs de base sont pris tangents aux lignes de coordonnées (ou sinon perpendiculaires aux hypersurfaces de coordonnées). On ne peut pas définir de base globale puisque les vecteurs tournent, mais on peut définir une base locale en chaque point.*
Dans ce qui suit toute base vectorielle est liée à un système de coordonnées. Un changement de système de coordonnées implique un changement de base. Un changement de base est dû soit à un changement de système de coordonnées en un point donné, soit à un changement d'origine de cette base dans ce même système de coordonnées. En physique le choix d'un système de coordonnées est nécessaire et les équations de la physique doivent être indépendantes de ce choix.

Avec la définition 3.2.8 p. 21 de la base naturelle, le vecteur différentielle de OM s'écrit :

$$d\boldsymbol{OM} = \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{OM}}{\partial x^i}\, dx^i$$

$$\boxed{d\boldsymbol{OM} = \sum_i dx^i \mathbf{e}_i} \qquad (10)$$

Les dx^i sont donc les composantes contravariantes du vecteur différentiel $d\boldsymbol{OM}$ dans le repère naturel ayant pour origine M et pour coordonnées (x^i).

4 Matrices

4.1 Système d'équations linéaires

Une équation linéaire à coefficients réels ou complexes est une expression de la forme :

$$A_1u^1 + A_2u^2 + \cdots + A_nu^n = a$$

où les A_i et a appartiennent à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et où les u^i sont n inconnues.

Soit le système de m équations linéaires à n inconnues suivant :

$$\begin{cases} A_{11}u^1 + A_{12}u^2 + \cdots + A_{1n}u^n = a_1 \\ A_{21}u^1 + A_{22}u^2 + \cdots + A_{2n}u^n = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{m1}u^1 + A_{m2}u^2 + \cdots + A_{mn}u^n = a_m \end{cases} \tag{11}$$

Il est inutile de réécrire les inconnues pour chaque ligne. Simplifions l'écriture de ce système en définissant le nouvel opérateur de multiplication matricielle $\boxtimes$:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \tag{12}$$

Le tableau de scalaires $[A_{ij}]$ est appelé *matrice* A.

L'écriture des inconnues u^i en colonne plutôt qu'en ligne est justifiée au paragraphe 4.3 p. 33. Les propriétés des matrices découlent naturellement de cette notation et des propriétés des systèmes d'équations linéaires.

Notation 8. *Notation ligne-colonne*
Par convention le premier indice d'un élément de matrice A_{ij} est son numéro de ligne, le second est son numéro de colonne.

> Définition 4.1.1. *Dimension d'une matrice*
> *La dimension ou taille d'une matrice est son nombre de lignes et de colonnes.*

La matrice $[A_{ij}]_{mn}$ est de dimension $m \times n$ ou (m, n).

4.2 Addition matricielle

Nous ne considérons que les systèmes ayant autant d'équations que d'inconnues, $m = n$, qui donnent alors des matrices carrées et qui admettent une solution unique ou aucune solution.

Définition 4.2.1. *Ordre d'une matrice*
Une matrice est d'ordre n si elle est de dimension $n \times n$.

Le raisonnement sur des matrices d'ordre deux est facilement généralisable aux matrices d'ordre supérieur à deux. Soient les deux systèmes d'équations linéaires

$$\begin{cases} A_{11}u^1 + A_{12}u^2 = a_1 \\ A_{21}u^1 + A_{22}u^2 = a_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B_{11}u^1 + B_{12}u^2 = b_1 \\ B_{21}u^1 + B_{22}u^2 = b_2 \end{cases}$$

Ces systèmes s'écrivent en notation matricielle

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Additionnons ligne à ligne les deux systèmes de départ :

$$\begin{cases} (A_{11} + B_{11})u^1 + (A_{12} + B_{12})u^2 = a_1 + b_1 \\ (A_{21} + B_{21})u^1 + (A_{22} + B_{22})u^2 = a_2 + b_2 \end{cases}$$

Sous forme matricielle nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

En définissant le nouvel opérateur d'addition matricielle $\boxplus$ nous avons

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \boxplus \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix}$$

ainsi que :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

On définit de même la soustraction matricielle par :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \boxminus \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - B_{11} & A_{12} - B_{12} \\ A_{21} - B_{21} & A_{22} - B_{22} \end{bmatrix}$$

L'addition et la soustraction de deux matrices de dimensions différentes ne sont pas définies.

Propriétés de l'addition matricielle

Soient A, B, C trois matrices :

(1) Associativité :

$$A \boxplus (B \boxplus C) = (A \boxplus B) \boxplus C$$

(2) Existence d'un élément neutre appelé matrice nulle, notée 0, dont tous les éléments sont nuls et telle que :

$$A \boxplus 0 = A$$

(3) Pour toute matrice A il existe une matrice opposée notée $\bar{A}$ telle que :

$$A \boxplus \bar{A} = 0$$

L'existence d'une matrice opposée nécessite donc l'existence d'une matrice nulle. De plus on montre que la soustraction matricielle est l'addition matricielle avec la matrice opposée :

$$A \boxplus \bar{B} = A \boxminus B$$

(4) Commutativité :

$$A \boxplus B = B \boxplus A$$

L'addition matricielle est habituellement notée $+$ et la soustraction $-$ par analogie avec les scalaires.

4.3 Multiplication matricielle

4.3.1 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Reprenons le système d'équations linéaires (11) p. 31. Nous pouvons multiplier chaque équation par le scalaire α. Le produit matriciel de la matrice A par le scalaire α sera noté :

$$\alpha \boxtimes [A_{ij}]_{mn} = \begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \cdots & \alpha A_{1n} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \cdots & \alpha A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha A_{m1} & \alpha A_{m2} & \cdots & \alpha A_{mn} \end{bmatrix}$$

Le scalaire α est une matrice a un seul élément.

Propriétés de la multiplication d'une matrice par un scalaire

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

(1) Associativité :

$$\alpha \boxtimes (\beta \boxtimes A) = (\alpha \times \beta) \boxtimes A$$

Il s'agit ici d'un abus de langage, il n'y a pas associativité puisque le signe $\boxtimes$ du membre de gauche de l'égalité est le signe opératoire de la multiplication d'une matrice par un réel, alors que le signe $\times$ du membre de droite est celui de la multiplication dans $\mathbb{R}$.

(2) Distributivité par rapport à l'addition des réels :

$$(\alpha + \beta) \boxtimes A = (\alpha \boxtimes A) \boxplus (\beta \boxtimes A)$$

Il s'agit ici aussi d'un abus de langage, il n'y a pas distributivité puisque le signe $+$ du membre de gauche est le signe opératoire de l'addition dans $\mathbb{R}$, alors que le signe $\boxplus$ du membre de droite est celui de l'addition matricielle.

(3) Distributivité à gauche et à droite par rapport à l'addition des matrices :

$$\alpha \boxtimes (A \boxplus B) = (A \boxplus B) \boxtimes \alpha = (\alpha \boxtimes A) \boxplus (\alpha \boxtimes B)$$

(4) Existence d'un élément neutre, le réel 1, tel que :

$$1 \boxtimes A = A$$

(5) Commutativité :

$$\alpha \boxtimes A = A \boxtimes \alpha$$

4.3.2 Multiplication de deux matrices

Soient les deux systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} A_{11}u^1 + A_{12}u^2 = a_1 \\ A_{21}u^1 + A_{22}u^2 = a_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B_{11}v^1 + B_{12}v^2 = u^1 \\ B_{21}v^1 + B_{22}v^2 = u^2 \end{cases}$$

Injectons le second dans le premier :

$$\begin{cases} A_{11}(B_{11}v^1 + B_{12}v^2) + A_{12}(B_{21}v^1 + B_{22}v^2) = a_1 \\ A_{21}(B_{11}v^1 + B_{12}v^2) + A_{22}(B_{21}v^1 + B_{22}v^2) = a_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21})v^1 + (A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22})v^2 = a_1 \\ (A_{21}B_{11} + A_{21}B_{21})v^1 + (A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22})v^2 = a_2 \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{21}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Or nous avons aussi

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

En injectant la seconde relation dans la première :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \left\{ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

En effectuant le calcul on constate l'associativité du produit matriciel et l'on a donc :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

On constate que chaque élément de la matrice produit est la multiplication d'une ligne de A par une colonne de B. Par conséquent la condition nécessaire et suffisante pour multiplier deux matrices dans l'ordre AB est que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. Les matrices sont alors dites *compatibles*. On justifie ainsi l'écriture en colonne des inconnues (12) p. 31.

NOTATION 9. *La multiplication matricielle est souvent posée comme suit :*

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

Propriétés de la multiplication matricielle

(1) Associativité :

$$A \boxtimes (B \boxtimes C) = (A \boxtimes B) \boxtimes C$$

(2) Distributivité à gauche et à droite par rapport à l'addition matricielle :

$$A \boxtimes (B \boxplus C) = (B \boxplus C) \boxtimes A = A \boxtimes B \boxplus A \boxtimes C$$

(3) En général non commutativité :

$$A \boxtimes B \neq B \boxtimes A$$

La multiplication matricielle est souvent notée $\times$ ou encore on pourra omettre le symbole, par analogie avec la multiplication des scalaires.

4.4 Matrice colonne et matrice ligne

Nous noterons les matrices colonnes et les matrices lignes avec des parenthèses plutôt qu'avec des crochets. Pour une base donnée, un ensemble ordonné de nombre est un vecteur. Par conséquent, pour une base donnée, les matrices colonnes et les matrices lignes sont des vecteurs. Les éléments de ces matrices sont les composantes covariantes ou contravariantes d'un vecteur. Les inconnues u_1, u_2 forment un vecteur. Nous avons les deux possibilités suivantes :

— On pré-multiplie A par une matrice ligne

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}u_1 + A_{21}u_2 & A_{12}u_1 + A_{22}u_2 \end{pmatrix}$$

Le couple u_1, u_2 forme une matrice ligne et le résultat est aussi une matrice ligne.

— On post-multiplie A par une matrice colonne

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}u_1 + A_{12}u_2 \\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 \end{pmatrix}$$

Le couple u_1, u_2 forme une matrice colonne et le résultat est aussi une matrice colonne.

Toute matrice carrée peut prendre en entrée un vecteur et donner en sortie un autre vecteur, autrement dit peut transformer un vecteur en un autre vecteur.

Remarque 8. *La notation* 9 *p.* 34 *adoptée pour la multiplication matricielle implique que les deux écritures suivantes*

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

n'ont pas de sens car les matrices ne sont pas compatibles.

Nous n'obtenons pas le même système d'équations linéaires selon que l'on pré-multiplie ou que l'on post-multiplie.

4.5 Matrice transposée

Définition 4.5.1. *Matrice transposée*
Soit A_{ij} un élément de la matrice A. La matrice B est la transposée de A ssi :

$$\forall i, j \quad B_{ij} = A_{ji}$$

Notation 10. *La transposée de A est notée A^T.*

Si A est une matrice $m \times n$ alors A^T est une matrice $n \times m$. Par conséquent la transposée d'une matrice colonne donne une matrice ligne et réciproquement.

Propriétés de la transposition matricielle

Soit k un scalaire :

$$\begin{aligned}
&(A+B)^T = A^T + B^T \\
&(A^T)^T = A \\
&(kA)^T = kA^T \\
&(AB)^T = B^T A^T
\end{aligned}$$

Si $A^T = A$ alors A est symétrique, si $A^T = -A$ alors A est antisymétrique.

Exemple 4.5.1. *Nous avons :*

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A_{11}u^1 + A_{12}u^2 \\ A_{21}u^1 + A_{22}u^2 \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} A_{11}u^1 + A_{12}u^2 & A_{21}u^1 + A_{22}u^2 \end{pmatrix} \\
\left\{ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \right\}^T &= \begin{pmatrix} u^1 & u^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

Nous retrouvons la propriété $(AB)^T = B^T A^T$.

4.6 Notation indicielle des matrices

L'addition matricielle est notée :

$$\forall i, j \quad C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Pour la multiplication matricielle nous utilisons la convention de notation ligne-colonne pour les éléments des matrices. Elle est alors notée :

$$\begin{aligned}
\forall i, j \quad C_{ij} &= \sum_k A_{ik} B_{kj} \\
&= \sum_k B_{kj} A_{ik}
\end{aligned}$$

Remarque 9. *Pour la multiplication matricielle, soit le dernier indice de la première matrice est égal au premier indice de la seconde matrice, soit le premier indice de la première matrice est égal au dernier indice de la seconde matrice.*

Nous avons les équivalences suivantes

$$A_{ij}u^j = a_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A_{11}u^1 + A_{12}u^2 = a_1 \\ A_{21}u^1 + A_{22}u^2 = a_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}u^1 + A_{12}u^2 \\ A_{21}u^1 + A_{22}u^2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}$$

De même

$$A_{ji}u^j = b_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A_{11}u^1 + A_{21}u^2 = b_1 \\ A_{12}u^1 + A_{22}u^2 = b_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}u^1 + A_{21}u^2 \\ A_{12}u^1 + A_{22}u^2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A^T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$$

Les matrices A_{ij} et A_{ji} sont transposées l'une de l'autre. Grâce à la notation indicielle, démontrons une propriété de la transposition matricielle.

Théorème 4.6.1. *Soient $A = [A]_{mn}$ et $B = [B]_{np}$ alors :*

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Démonstration.

$$(AB)^T = \left(\sum_k A_{ik}B_{kj}\right)^T = [C_{ij}]^T_{mp} = [C_{ji}]_{pm}$$

En posant

$$\begin{cases} B^T = D = [D_{ij}]_{pn} \\ A^T = E = [E_{ij}]_{nm} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} D_{ij} = B_{ji} \\ E_{ij} = A_{ji} \end{cases}$$

on a :

$$B^T A^T = DE = \sum_k (D_{ik}E_{kj}) = \sum_k (B_{ki}A_{jk}) = \sum_k (A_{jk}B_{ki}) = [C_{ji}]_{pm}$$

□

4.7 Matrice identité

Définition 4.7.1. *Matrice identité*
La matrice identité ou matrice unité, notée I, est une matrice carrée d'ordre n, telle que pour toute matrice carrée A du même ordre n :

$$AI = IA = A$$

En notation indicielle :

$$I = [\delta_{ij}]_{nn}$$

4.8 Inverse d'une matrice carrée

Définition 4.8.1. *Inverse d'une matrice*
Une matrice carrée A est inversible s'il existe une matrice carrée B de même ordre, appelée inverse de A, telle que :

$$AB = BA = I$$

En notation indicielle :

$$\sum_k A_{ik}B_{kj} = \sum_k B_{ik}A_{kj} = \delta_{ij}$$

Notation 11. *La matrice inverse de A est notée A^{-1}.*

L'inversion matricielle a les propriétés suivantes. Soit k un scalaire non nul :

$$\begin{aligned}(A^{-1})^{-1} &= A \\ (kA)^{-1} &= k^{-1}A^{-1} \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}\end{aligned}$$

La matrice inverse est unique.

Démonstration. Supposons $B \neq C$ telles que :

$$\begin{cases} AB = BA = I \\ AC = CA = I \end{cases}$$

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

□

Soient $A = [A]_{mn}$ et $B = [B]_{np}$ alors :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Démonstration. Par associativité du produit matriciel :

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

De même :

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

□

Si A est inversible alors A^T est inversible et les opérations de transposition et d'inversion commutent : $(A^{-1})^T = \left(A^T\right)^{-1}$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
&AA^{-1} = I \\
&\left(AA^{-1}\right)^T = I^T \\
&\left(A^{-1}\right)^T A^T = I \\
&\left[\left(A^{-1}\right)^T A^T\right]\left(A^T\right)^{-1} = I\left(A^T\right)^{-1} \\
&\left(A^{-1}\right)^T \left[A^T\left(A^T\right)^{-1}\right] = \left(A^T\right)^{-1} \\
&\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

Si A^{-1} existe alors on peut prendre sa transposée et $(A^{-1})^T$ existe, donc $\left(A^T\right)^{-1}$ existe. □

4.9 Déterminant d'une matrice carrée

Soit le système d'équations :

$$
\begin{cases}
A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = a_1 & L_1 \\
A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = a_2 & L_2
\end{cases}
$$

On résout par substitution :

$$
\begin{cases}
A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = a_1 & L_1 \\
A_{11}x_1 + \dfrac{A_{11}A_{22}}{A_{21}}\,x_2 = \dfrac{A_{11}}{A_{21}}\,a_2 & L_2 \times \dfrac{A_{11}}{A_{21}}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\left(A_{12} - \dfrac{A_{11}A_{22}}{A_{21}}\right)x_2 = a_1 - \dfrac{A_{11}}{A_{21}}\,a_2 & L_1 - L_2 \\
x_1 = \dfrac{a_2}{A_{21}} - \dfrac{A_{22}}{A_{21}}\,x_2 & L_2
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\left(A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}\right)x_2 = A_{21}a_1 - A_{11}a_2 & L_1 \times A_{21} \\
x_1 = \dfrac{a_2}{A_{21}} - \dfrac{A_{22}}{A_{21}}\dfrac{A_{21}a_1 - A_{11}a_2}{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
x_2 = \dfrac{A_{21}a_1 - A_{11}a_2}{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}} \\
x_1 = \dfrac{A_{12}a_2 - A_{22}a_1}{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}}
\end{cases}
$$

L'expression $A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}$, appelée *déterminant*, doit être non nulle pour que le système soit soluble. On le note :

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \\
&= A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}
\end{aligned}
$$

On remarque que l'on a alors :

$$
x_1 = \begin{vmatrix} a_1 & A_{12} \\ a_2 & A_{22} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}
$$

Pour trouver l'expression du déterminant d'une matrice 3×3 nous définissons d'abord un mineur d'une matrice.

Définition 4.9.1. *Mineur d'une matrice*
Le $\text{mineur}_{ij}(A)$ *est le déterminant obtenu à partir de la matrice* A *en supprimant la* i^e *ligne et la* j^e *colonne.*

Exemple 4.9.1. *Soit la matrice*

$$A \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Le $\text{mineur}_{23}(A)$ *est le déterminant suivant :*

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} = A_{11}A_{32} - A_{31}A_{12}$$

Nous définissons à présent un cofacteur d'une matrice.

Définition 4.9.2. *Cofacteur d'une matrice*

$$\mathrm{C}_{ij}(A) \triangleq (-1)^{i+j}\text{mineur}_{ij}(A)$$

Exemple 4.9.2. *En reprenant l'exemple précédent*

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_{23}(A) &= (-1)^5\text{mineur}_{23}(A) \\ &= A_{31}A_{12} - A_{11}A_{32} \end{aligned}$$

En notation indicielle, le déterminant de la matrice A s'écrit :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_i A_{ij}\,\mathrm{C}_{ij}(A) \\ &= \sum_j A_{ij}\,\mathrm{C}_{ij}(A) \end{aligned} \tag{13}$$

Le déterminant de la matrice 3×3 peut s'écrire de 6 façons, correspondant au choix d'une ligne parmi trois ou d'une colonne parmi trois :

$$\begin{aligned} \det(A) &= A_{11}\,\mathrm{C}_{11} + A_{12}\,\mathrm{C}_{12} + A_{13}\,\mathrm{C}_{13} \\ &= A_{21}\,\mathrm{C}_{21} + A_{22}\,\mathrm{C}_{22} + A_{23}\,\mathrm{C}_{23} \\ &= A_{31}\,\mathrm{C}_{31} + A_{32}\,\mathrm{C}_{32} + A_{23}\,\mathrm{C}_{33} \\ &= A_{11}\,\mathrm{C}_{11} + A_{21}\,\mathrm{C}_{21} + A_{31}\,\mathrm{C}_{31} \\ &= A_{12}\,\mathrm{C}_{12} + A_{22}\,\mathrm{C}_{22} + A_{32}\,\mathrm{C}_{32} \\ &= A_{13}\,\mathrm{C}_{13} + A_{23}\,\mathrm{C}_{23} + A_{33}\,\mathrm{C}_{33} \end{aligned}$$

EXEMPLE 4.9.3. *En reprenant l'exemple précédent*

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{12} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix}$$

La différentielle du déterminant n'est pas le déterminant de la différentielle de la matrice. La différentielle de (13) p. 40 donne :

$$\begin{aligned} d\det(A) &= \sum_j \left(dA_{ij}\,\mathrm{C}_{ij}(A) + A_{ij}\,d\mathrm{C}_{ij}(A)\right) \\ &= \sum_j dA_{ij}\,\mathrm{C}_{ij}(A) + \sum_j A_{ij}\,d\mathrm{C}_{ij}(A) \end{aligned}$$

Pour une matrice 3×3 :

$$\begin{aligned} d\det(A) &= dA_{11}C_{11} + dA_{12}C_{12} + dA_{13}C_{13} + A_{11}dC_{11} + A_{12}dC_{12} + A_{13}dC_{13} \\ &= dA_{11}C_{11} + dA_{12}C_{12} + dA_{13}C_{13} \\ &\quad + A_{11}d(A_{22}A_{33} - A_{32}A_{23}) + A_{12}d(A_{23}A_{31} - A_{21}A_{33}) + A_{13}d(A_{21}A_{32} - A_{31}A_{22}) \\ &= dA_{11}C_{11} + dA_{12}C_{12} + dA_{13}C_{13} \\ &\quad + dA_{21}(A_{12}A_{33} - A_{13}A_{32}) + dA_{22}(A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31}) + dA_{23}(A_{11}A_{32} - A_{12}A_{31}) \\ &\qquad + dA_{31}(A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}) + dA_{32}(A_{11}A_{23} - A_{13}A_{21}) + dA_{33}(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) \\ &= dA_{11}C_{11} + dA_{12}C_{12} + dA_{13}C_{13} \\ &\quad + dA_{21}C_{21} + dA_{22}C_{22} + dA_{23}C_{23} \\ &\qquad + dA_{31}C_{31} + dA_{32}C_{32} + dA_{33}C_{33} \end{aligned}$$

En notation indicielle et en généralisant :

$$\boxed{d\det(A) = \sum_i \sum_j \mathrm{C}_{ij}(A)\,dA_{ij}} \tag{14}$$

5 Formes quadratiques

Les carrés des éléments de longueur, par exemple dans le plan $s^2 = x^2 + y^2$, sont des formes quadratiques, dont nous allons donner la définition.

Définition 5.0.1. *Monôme*
Un monôme est un produit de puissances de variables, d'exposants entiers non négatifs, multiplié par un coefficient réel ou complexe.

Exemple 5.0.1. $5x^7y$ *est un monôme à deux variables* x, y, *de coefficient* 5.

Définition 5.0.2. *Degré d'un monôme*
Le degré d'un monôme est la somme des exposants de ses variables.

Exemple 5.0.2. *Le monôme* $5x^6y^2$ *est de degré* 8.

Définition 5.0.3. *Polynôme*
Un polynôme est une somme dont chaque terme est un monôme.

Exemple 5.0.3. $5x^6y^2z^3 - 2y^4 + 3$ *est un polynôme.*

Définition 5.0.4. *Degré d'un polynôme*
Le degré d'un polynôme est le degré le plus élevé de ses termes.

Exemple 5.0.4. $deg(5x^6y^2z^3 - 2y^4 + 3) = 11.$

Définition 5.0.5. *Polynôme homogène ou forme algébrique*
Un polynôme est homogène de degré r si chacun de ses termes et de degré r.

Exemple 5.0.5. *Le polynôme $4x^5z^2 + 3x^3y^4 - xy^3z^3$ est homogène de degré 7.*

Définition 5.0.6. *Forme*
On appelle forme tout polynôme homogène.

Définition 5.0.7. *Forme linéaire*
On appelle forme linéaire tout polynôme homogène de degré 1 par rapport à ses n variables $u^1, u^2, \dots, u^n$:

$$f = a_1u^1 + a_2u^2 + \cdots + a_nu^n$$

Exemple 5.0.6. *$f(x, y, z)$ est une forme linéaire :*

$$f(x, y, z) = ax + by + cz$$

Définition 5.0.8. *Forme quadratique*
On appelle forme quadratique tout polynôme homogène de degré deux par rapport à ses n variables $u^1, u^2, \dots, u^n$:

$$Q = a_{11}u^1u^1 + a_{12}u^1u^2 + \ldots + a_{1n}u^1u^n + a_{21}u^2u^1 + a_{22}u^2u^2 + \cdots + a_{2n}u^2u^n \\ + \cdots + a_{n1}u^nu^1 + a_{n2}u^nu^2 + \cdots + a_{nn}u^nu^n$$

Nous ne considèrerons que les formes quadratiques sur le corps des réels, c'est-à-dire telles que leurs coefficients $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Les formes quadratiques ne doivent pas être confondues avec les équations du second degré, celles-ci n'ont qu'une seule variable et les termes sont de degré deux ou moins.

Exemple 5.0.7. *Forme quadratique*

$$\begin{array}{ll} \textit{unaire} & Q(x) = ax^2 \\ \textit{binaire} & Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \\ \textit{ternaire} & Q(x,y,z) = ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2 \end{array}$$

Définition 5.0.9. *Forme quadratique définie*
Si le vecteur nul $\mathbf{0}$ *est le seul vecteur tel que* $Q(\mathbf{0}) = 0$ *alors* Q *est définie ou anisotrope. Les signes de* Q *sont tous positifs ou tous négatifs.*

Définition 5.0.10. *Forme quadratique indéfinie*
S'il existe un vecteur non nul $\boldsymbol{v}$ *tel que* $Q(\boldsymbol{v}) = 0$ *alors* Q *est indéfinie, et* Q *et* $\boldsymbol{v}$ *sont isotropes.* Q *a à la fois des signes positifs et des signes négatifs.*

La métrique de l'espace de Minkowski est une forme quadratique indéfinie.

Définition 5.0.11. *Forme quadratique positive*
Si pour tout vecteur $\mathbf{u}$ *le scalaire* $Q(\mathbf{u})$ *est positif ou nul, alors* Q *est positive :*

$$\forall \mathbf{u} \in E, \quad Q(\mathbf{u}) \geqslant 0$$

Définition 5.0.12. *Forme quadratique négative*
Si pour tout vecteur $\mathbf{u}$ *le scalaire* $Q(\mathbf{u})$ *est négatif ou nul, alors* Q *est négative :*

$$\forall \mathbf{u} \in E, \quad Q(\mathbf{u}) \leqslant 0$$

Définition 5.0.13. *Forme quadratique définie positive*
La forme quadratique est définie positive si on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{0} \ &: \ Q(\mathbf{0}) = 0 \\ \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \ &: \ Q(\mathbf{u}) > 0 \end{aligned}$$

La métrique de l'espace de la physique classique non relativiste est définie positive.

Définition 5.0.14. *Forme quadratique définie négative*
La forme quadratique est définie négative si on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{0} \ &: \ Q(\mathbf{0}) = 0 \\ \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \ &: \ Q(\mathbf{u}) < 0 \end{aligned}$$

Exemple 5.0.8. *Montrons que la forme différentielle quadratique,*

$$Q = dx^2 + 3dxdy + 4dy^2 + dz^2$$

est définie positive.

$$\begin{aligned} Q &= dx^2 + 3dxdy + \tfrac{9}{4}dy^2 + \tfrac{7}{4}dy^2 + dz^2 \\ &= \left(dx + \tfrac{3}{2}dy\right)^2 + \tfrac{7}{4}dy^2 + dz^2 \end{aligned}$$

Tous les termes sont des carrés de coefficients positifs, donc Q est positive et n'est nulle que lorsque $dx = dy = dz = 0$, par conséquent elle est définie positive.

Exemple 5.0.9. *La forme quadratique,*

$$Q\left(x^1, x^2, x^3\right) = 8\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 - 6x^1x^3 + \left(x^3\right)^2$$

n'est pas définie positive. En effet,

$$Q\left(1, 0, 3\right) = -1$$

5.1 Matrice symétrique associée

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} ax + by/2 \\ bx/2 + cy \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{u}^T A \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2 &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 & c/2 \\ b/2 & d & e/2 \\ c/2 & e/2 & f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{u}^T A \mathbf{u} \end{aligned}$$

Toute forme quadratique peut s'écrire sous forme matricielle,

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \cdots & u^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{u}^T A \mathbf{u} \end{aligned}$$

et sous forme indicielle avec la convention de sommation :

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \cdots & u^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j}u^j \\ a_{2j}u^j \\ \vdots \\ a_{nj}u^j \end{pmatrix} \\ &= u^i \left(a_{ij}u^j \right) \\ &= a_{ij}u^i u^j \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{u}^T A\mathbf{u} = a_{ij}u^i u^j} \tag{15}$$

L'égalité $u^iu^j = u^ju^i$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} Q = a_{11}u^1u^1 &+ \tfrac{1}{2}(a_{12}+a_{21})u^1u^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}(a_{1n}+a_{n1})u^1u^n \\ &+ \tfrac{1}{2}(a_{12}+a_{21})u^2u^1 + \cdots + \tfrac{1}{2}(a_{2n}+a_{n2})u^2u^n + \ldots \\ &+ \tfrac{1}{2}(a_{1n}+a_{n1})u^nu^1 + \cdots + a_{nn}u^nu^n \end{aligned}$$

Posons $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ soit :

$$b_{11} = a_{11}, \quad b_{12} = b_{21} = \tfrac{1}{2}(a_{12}+a_{21}), \quad \text{etc.}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} Q = b_{11}u^1u^1 &+ b_{12}u^1u^2 + \cdots + b_{1n}u^1u^n \\ &+ b_{12}u^2u^1 + \cdots + b_{2n}u^2u^n + \ldots \\ &+ b_{1n}u^nu^1 + \cdots + b_{nn}u^nu^n \end{aligned}$$

La matrice est maintenant symétrique

$$\forall i, j \quad b_{ij} = b_{ji}$$

et :

$$Q = \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \cdots & u^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

Plus généralement, tout polynôme P des $2n$ variables $u^1, u^2, \cdots, u^n$ et $v^1, v^2, \cdots, v^n$,

$$P = a_{11}u^1v^1 + a_{12}u^1v^2 + \cdots + a_{1n}u^1v^n + a_{21}u^2v^1 + \cdots + a_{2n}u^2v^n + \cdots + a_{n1}u^nv^1 + \cdots + a_{nn}u^nv^n$$

peut s'écrire sous forme matricielle,

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \cdots & u^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v^1 & v^2 & \cdots & v^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{u}^T A\mathbf{v} \\ &= \mathbf{v}^T A\mathbf{u} \end{aligned}$$

et sous forme indicielle avec la convention de sommation :

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \cdots & u^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j}v^j \\ a_{2j}v^j \\ \vdots \\ a_{nj}v^j \end{pmatrix} \\ &= u^i \left(a_{ij}v^j \right) \\ &= a_{ij}u^i v^j \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{u}^T A \mathbf{v} = a_{ij}u^i v^j} \tag{16}$$

5.2 Réduction de Gauss

Par changement de variables, toute forme quadratique réelle (de coefficients réels) peut s'écrire comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires :

$$Q = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + \cdots + \lambda_n \tilde{x}_n^2$$

où les coefficients λ_i valent $+1$ ou -1, et la matrice symétrique associée est diagonale.

Exemple 5.2.1. *Soit une forme quadratique binaire :*

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= ax^2 + bxy + cy^2 \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}xy + \frac{b^2}{4a^2}y^2 - \frac{b^2}{4a^2}y^2 \right) + cy^2 \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}y \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right) y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \tilde{x} = \sqrt{|a|}[x + by/(2a)] \\ \tilde{y} = \sqrt{|c - b^2/(4a)|}y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q(\tilde{x},\tilde{y}) = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2$$

Exemple 5.2.2. *Soit une forme quadratique ternaire :*

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= xy + yz + xz \\ &= x(y+z) + yz \\ &= (x+z)(y+z) - z^2 \end{aligned}$$

$(x+z)(y+z)$ *est de la forme* $(a-b)(a+b)$ *avec :*

$$\begin{cases} a = x + z \\ b = y + z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2a = x + y + 2z \\ 2b = y - x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= \tfrac{1}{2}[(x+y+2z) + (y-x)] \times \tfrac{1}{2}[(x+y+2z) - (y-x)] - z^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\left(x+y+2z \right)^2 - \tfrac{1}{4}(y-x)^2 - z^2 \end{aligned}$$

5.3 Loi d'inertie de Sylvester

La loi d'inertie de Sylvester stipule que le nombre p de coefficients $+1$ et le nombre q de coefficients -1 sont des invariants de la forme quadratique réelle. Ils ne dépendent pas du changement de variables. Les nombres p et q sont appelés indices d'inertie, (p, q) est la signature de la forme quadratique, $p + q$ est son rang. Une forme définie positive a pour signature $(p, 0)$, une forme définie négative a pour signature $(0, q)$.

6 Applications linéaires

6.1 Définitions

Définition 6.1.1. *Application*
Une application est une relation entre deux ensembles pour laquelle chaque élément de l'ensemble de départ possède une image et une seule dans l'ensemble d'arrivée.

Définition 6.1.2. *Application linéaire*
Une application linéaire (ou transformation linéaire ou opérateur linéaire) est une application d'un espace vectoriel dans un autre espace vectoriel (ou le même), qui conserve l'addition vectorielle et la multiplication par un scalaire. Elle prend en entrée un vecteur et donne en sortie un vecteur.
Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{R}$, et soit f une application de E dans F :

$$\begin{aligned} f\ &: E \to F \\ &\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \end{aligned}$$

f est linéaire si elle est :

(1) Additive : $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E \times E, \quad f(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) \oplus f(\mathbf{v})$

(2) Homogène de degré un : $\forall \mathbf{u} \in E,\ \forall \lambda \in K, \quad f(\lambda \odot \mathbf{u}) = \lambda \odot f(\mathbf{u})$

Les deux conditions de linéarité peuvent être remplacées par la seule condition suivante :

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E \times E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda \odot \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \lambda \odot f(\mathbf{u}) \oplus f(\mathbf{v})$$

Nous dirons que f préserve les opérations de combinaison linéaire car peu importe que f soit appliquée avant ou après l'addition vectorielle ou la multiplication par un scalaire.

Remarque 10. *Dans* (2) *posons* $\lambda = 0$. *En utilisant les propriétés* 3.1.3 *p.* 14 *:*

$$
\begin{aligned}
f(0 \odot \mathbf{u}) &= 0 \odot f(\mathbf{u}) \\
f(\mathbf{0}) &= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Si f *est linéaire alors* $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ *est donc une condition nécessaire pour que* f *soit linéaire.*

Nous n'avons besoin que de transformer les vecteurs de base. En effet, la transformation linéaire d'un vecteur $\mathbf{u}$ quelconque s'écrit :

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{u}) &= f\left(u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + \cdots + u^n\mathbf{e}_n\right) \\
&= u^1 f(\mathbf{e}_1) + u^2 f(\mathbf{e}_2) + \cdots + u^n f(\mathbf{e}_n)
\end{aligned}
$$

6.1.1 Exemples

Exemple 6.1.1. *Soit* α *un scalaire. L'homothétie vectorielle de rapport* α *:*

$$
\begin{aligned}
h : E &\to E \\
\mathbf{x} &\mapsto \alpha \odot \mathbf{x}
\end{aligned}
$$

est une application linéaire. En effet :

$$
\begin{aligned}
h(\mathbf{x}) &= \alpha \odot \mathbf{x} \\
h(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) &= \alpha \odot (\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \\
&= (\alpha \odot \mathbf{x}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{y}) \\
&= h(\mathbf{x}) \oplus h(\mathbf{y})
\end{aligned}
$$

et,

$$
\begin{aligned}
h(\lambda \odot \mathbf{x}) &= \alpha \odot (\lambda \odot \mathbf{x}) \\
&= \alpha\lambda \odot \mathbf{x} \\
&= \lambda \odot (\alpha \odot \mathbf{x}) \\
&= \lambda \odot h(\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

Exemple 6.1.2. *Soit* $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des fonctions dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, et soit* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. L'application dérivation,*

$$
\begin{aligned}
d : \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\
f &\mapsto f'
\end{aligned}
$$

qui à toute fonction f *associe sa dérivée* f'*, est linéaire. En effet, la dérivée de la somme de deux fonctions est la somme de leur dérivée,*

$$d(f + g) = df + dg$$

et la dérviée d'une fonction multipliée par une constante est égale à cette constante fois la dérivée de cette fonction :

$$d(\lambda f) = \lambda\, df$$

6.2 Transformations actives et passives

Tout système d'équations linéaires,

$$\begin{cases} a_{11}\, u^1 + a_{12}\, u^2 = v^1 \\ a_{21}\, u^1 + a_{22}\, u^2 = v^2 \end{cases}$$

est une application linéaire de chaque vecteur $\mathbf{u}(u^1, u^2)$ vers son vecteur image $\mathbf{v}(v^1, v^2)$ qui peut s'écrire sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$$

Elle s'écrit aussi sous forme indicielle :

$$\forall j \quad a_{ij} u^i = v^j$$

On vérifie que l'on a bien les propriétés d'additivité et d'homogénéité de degré un,

$$A(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}) = A(\mathbf{u_1}) + A(\mathbf{u_2}) \qquad et \qquad A(\lambda \mathbf{u}) = \lambda A(\mathbf{u})$$

qui caractérisent les applications linéaires. L'application étant bijective :

$$\det A \neq 0$$

Les transformations linéaires peuvent être interprétées de deux façons. Pour donner une représentation graphique à l'action d'une matrice sur un vecteur, nous supposerons que les inconnues sont les composantes contravariantes d'un vecteur, c'est-à-dire les coordonnées des points aux extrémités des vecteurs :

(1) Transformation ponctuelle linéaire

(v^1, v^2) sont les coordonnées du point Q image du point $P(u^1, u^2)$ dans le même système de coordonnées.

> Exemple 6.2.1. *Le système d'équations suivant,*
>
> $$\begin{cases} v^1 = \frac{1}{2}\, u^1 - 4u^2 \\ v^2 = \frac{1}{3}\, u^1 + u^2 \end{cases}$$
>
> *transforme le vecteur $P(2, 1)$ en son image $Q(-3, 5/3)$.*

On parle alors de l'aspect *alibi*[1] de la transformation, ou bien d'une transformation *active*. La plupart du temps on supposera que l'on effectue cette transformation.

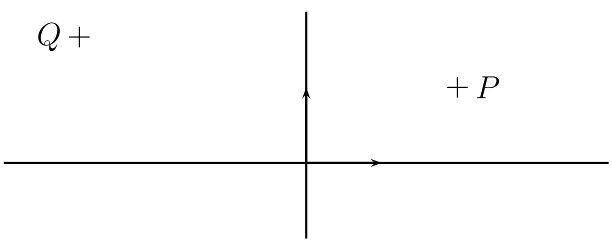


Fig. 6.1 – Le point P passe en Q

1. du latin « ailleurs ».

(2) Changement de système de coordonnées

(v^1, v^2) sont les coordonnées du même point P dans un nouveau système de coordonnées. On parle alors de l'aspect *alias* de la transformation, ou bien d'une transformation *passive*. Les deux systèmes de coordonnées sont reliés par la relation $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$. Pour trouver dans l'ancien système de coordonnées, les coordonnées du vecteur de base $(1, 0)$ de ce nouveau système, on résoud le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2}\,u^1 - 4\,u^2 \\ 0 = \frac{1}{3}\,u^1 + u^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right) u^1 \\ u^2 = -\frac{1}{3}\,u^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^1 = \frac{6}{11} \\ u^2 = -\frac{2}{11} \end{cases}$$

Pour trouver le vecteur de base de coordonnées $(0, 1)$ on résoud le système :

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2}\,u^1 - 4u^2 \\ 1 = \frac{1}{3}\,u^1 + u^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^1 = 8u^2 \\ 1 = \left(\frac{8}{3} + 1\right) u^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^1 = \frac{24}{11} \\ u^2 = \frac{3}{11} \end{cases}$$

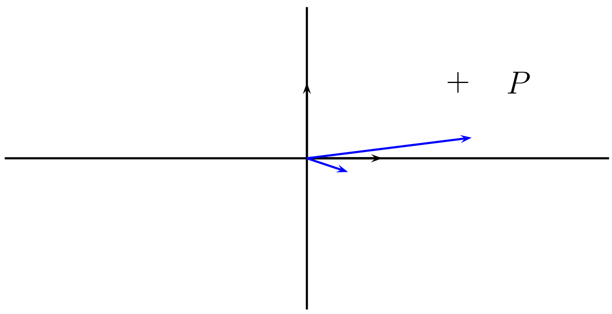


Fig. 6.2 – Nouveau système de coordonnées

En appliquant une transformation linéaire à un système de coordonnées rectangulaire, on obtient un système de coordonnées dont les lignes de coordonnées sont rectilignes et obliques (Fig.6.2).

6.3 Transformation affine

Lorsque l'on combine une transformation linéaire et une translation on obtient une transformation *affine*,

$$\mathbf{v} = A\mathbf{u} + \mathbf{b}$$

où $\mathbf{b}$ est un vecteur constant. En posant $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, nous voyons que l'origine du nouveau repère se trouve à l'extrémité du vecteur $\mathbf{b}$.

6.4 Transformation orthogonale

Une matrice carrée A est *orthogonale* ssi :

$$AA^T = A^T A = I \qquad \Leftrightarrow \qquad A^T = A^{-1}$$

Le déterminant d'une matrice orthogonale est de carré unité. S'il vaut $+1$ la matrice est dite *directe*. Par exemple les matrices identité et les matrices rotation d'un angle θ autour d'un axe Δ quelconque sont des matrices directes. Si le déterminant vaut -1 la matrice est dite *indirecte*. Une transformation est orthogonale ssi sa matrice est orthogonale.

7 Espace euclidien

7.1 Histoire de la géométrie euclidienne

Vers 300 av. J.-C., le mathématicien grec Euclide d'Alexandrie rédige un traité de mathématique constitué de 13 livres, intitulé « Éléments de géométrie », dans lequel, entre autres, il axiomatise la géométrie du plan. Il fonde ainsi ce qui à partir du 17^{e} siècle sera appelée *géométrie pure* ou *géométrie synthétique*, c'est-à-dire la géométrie sans l'utilisation d'un système de coordonnées. Son système axiomatique est un ensemble de

- notions primitives, qui sont des objets mathématiques tels que les points, les lignes ou les plans, qui n'ont pas de propriétés intrinsèques et dont les définitions importent peu, si ce n'est pour se faire une représentation mentale. En revanche leurs relations mutuelles sont d'importance pour la théorie
- 5 axiomes (et 5 notions communes qui sont aussi des axiomes) qui sont des propositions concernant les notions primitives, ces propositions étant supposées vraies et non démontrables dans le système en question. Ce sont des abstractions issues du monde physique. Le 5^{e} axiome est appelé axiome des parallèles et énonce que « Pour une droite donnée et un point n'appartenant pas à cette droite, il n'existe qu'une seule droite passant par ce point et qui ne coupe pas la droite donnée ».
- postulats (ou conjectures) qui sont des propositions démontrables ou non dans le système axiomatique, c'est-à-dire qui sont soit des théorèmes du système, soit des indécidables du système.
- définitions
- propositions démontrées, ou théorèmes

En 1899, dans « Grundlagen der Geometrie », le mathématicien allemand David Hilbert donne une formulation rigoureuse et moderne de la géométrie euclidienne, il montre qu'il faut en fait 20 axiomes pour la géométrie d'Euclide, les axiomes manquants étant contenus implicitement dans les définitions et figures des « Éléments ».

On attend d'un système axiomatique qu'il soit *consistant*, on dit aussi *cohérent*. Il l'est s'il est impossible d'y démontrer une proposition et son contraire, autrement dit si le système ne se contredit pas. Dès lors qu'un système contient une contradiction (ou incohérence) logique, tout peut y être démontré, et ce système perd toute utilité. On souhaite également qu'un système axiomatique soit *complet*, ce qui signifie que pour toute proposition P énonçable et compréhensible dans le système, l'on puisse démontrer P ou non-P, c'est-à-dire, si ses axiomes nous permettent d'engendrer toutes les vérités logiques (tautologies) exprimables dans ce sytème.

Un *indécidable* d'un système axiomatique S est un énoncé formulable dans S mais dont S ne peut démontrer s'il est vrai ou faux (du type « Je mens », ou « Cette phrase est fausse »). S est donc complet s'il ne contient pas d'indécidable. Lorsque l'on découvre un indécidable I dans un système axiomatique S, on peut l'ajouter aux axiomes de ce système et créer ainsi un nouveau système axiomatique S' dans lequel I n'est plus un indécidable.

Vers 1824, les mathématiciens Carl Friedrich Gauss, János Bolyai et Nikolai Ivanovich Lobachevsky développent la *géométrie hyperbolique* dans laquelle le 5^e axiome d'Euclide est remplacé par « Pour une droite donnée et un point n'appartenant pas à cette droite, il existe plus d'une droite passant par ce point et qui ne coupe pas la droite donnée ». En 1868, Eugenio Beltrami montre que la consistance de la géométries euclidienne implique la consistance de la géométrie hyperbolique, et réciproquement. Si la géométrie euclidienne est consistante alors la géométrie hyperbolique l'est aussi. Par conséquent l'axiome des parallèles est indépendant des autres axiomes, il n'est donc pas nécessaire pour former un système axiomatique, en le supprimant on crée la *géométrie absolue*. Dans cette géométrie, l'axiome des parallèles peut être énoncé mais ne peut être démontré, c'est un indécidable. La géométrie absolue est donc incomplète.

En 1931, Kurt Gödel démontre les deux théorèmes qui portent son nom. Le premier théorème de Gödel énonce que tout système formel (dont les systèmes axiomatiques) effectif (dont le nombre d'axiomes est fini) assez puissant (dans lequel on puisse faire de l'arithmétique) est soit inconsistant donc inintéressant puisque tout y est vrai et faux à la fois, soit incomplet, donc contient au moins un indécidable. Ils ne peuvent être à la fois consistants et complets. Le second théorème de Gödel énonce que la consistance d'un système formel fait partie de ses indécidables, autrement dit un système consistant ne peut savoir qu'il l'est (un homme saint d'esprit ne peut savoir qu'il l'est, mais il peut le poser comme axiome, ce que fera également un fou). Gödel a donc universalisé l'incomplétude déjà connue pour la géométrie absolue.

Si donc on ajoute un indécidable comme axiome à un système S pour en faire un système S', il existera au moins un autre indécidable I' dans S', qui est aussi un indécidable de S.

En 1637 René Descartes introduit le système de coordonnées rectilignes et montre que les problèmes de géométrie peuvent se résoudre par l'algèbre, fondant ainsi la *géométrie analytique*. Si on identifie un point à une paire de nombre réels ordonnés (x_1, x_2), et la distance entre deux points (x_1, x_2) et (y_1, y_2) par $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, alors tous les axiomes d'Euclide peuvent être démontrés, ils deviennent des théorèmes de la théorie des nombes réels. En 1870 Félix Klein fait de même et construit une geométrie analytique pour la géométrie hyperbolique. Ce n'est qu'en 1957 qu'Emil Artin démontrera que les approches synthétique et analytique sont équivalentes. L'étape suivant consiste à remplacer les points par des vecteurs (chapitre 3 p. 11) et à introduire un produit scalaire (chapitre 11 p. 87) pour avoir une distance. Nous formons alors les espaces vectoriels (chapitre 16 p. 133) qui permettent de définir l'espace euclidien sans passer par les axiomes d'Euclide.

7.2 Géométrie dans l'espace

On généralise le plan à un espace à trois dimensions, plat, sans courbure. On passe ainsi de la géométrie plane à la géométrie dans l'espace. Cet espace n'a pas d'existence propre, il est purement mathématique. Il permet de faire toute la physique classique (non relativiste), c'est le modèle le plus simple de l'espace physique. Pour mesurer sa courbure il ne s'agit plus de tracer un triangle, car on peut toujours se placer dans un plan de cet espace. Un espace de dimension trois est plat ssi le volume d'une sphère de rayon r vaut $\frac{4}{3}\pi r^3$, le volume d'un cube de côté r vaut r^3, etc. On généralise à des espaces de dimension supérieure à trois grâce aux hypersphères, aux hypercubes... Ces espaces plats sont appelés espaces *euclidiens* ou espaces affines euclidiens (nous verrons que les espaces pseudo-euclidiens sont aussi des espaces plats). Pour chaque dimension il n'existe qu'un seul espace euclidien car tous les espaces euclidiens de même dimension sont équivalents (isomorphes).

Définition 7.2.1. *Isomorphisme*
Un isomorphisme entre deux ensembles structurés est une application bijective qui préserve la structure, et dont la réciproque préserve aussi la structure.

En physique, les notions de distance et d'angle sont nécessaires pour situer deux points l'un par rapport à l'autre. Le produit scalaire dote l'espace topologique d'une métrique (une distance) et d'une mesure des angles.

Définition 7.2.2. *Espace métrique*
Soit E un ensemble non vide d'éléments appelés points et notés $A, B, C, \ldots$ Soit d une distance sur E,

$$d \ : E \times E \to \mathbb{R}^+$$

vérifiant les trois propriétés suivantes :

(1) Symétrie : $d(A,B) = d(B,A)$

(2) Séparation : $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

(3) Inégalité triangulaire : $d(A,B) \leqslant d(A,C) + d(C,B)$

Nous dirons que le couple (E,d) constitue un espace métrique.

7.3 Systèmes de coordonnées

Définition 7.3.1. *Coordonnées*
Les n valeurs ordonnées $(p^1, p^2, \ldots, p^n)$ noté simplement (p^i), permettant de repérer un point P sont appelées les coordonnées de ce point.

Réciproquement, un point P est l'ensemble des n valeurs ordonnées $(p^1, p^2, \ldots, p^n)$.

Définition 7.3.2. *Système de coordonnées*
Un ensemble de n variables $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ est un système de coordonnées d'un espace topologique à n dimensions, si chaque ensemble de valeurs pris par ces variables détermine de façon unique un point de cet espace, et si chaque point de cet espace topologique est déterminé par un ensemble unique de valeurs de ces variables.

Si cette bijection entre chaque point de l'espace topologique et les valeurs des coordonnées n'est pas réalisée, le système de coordonnées est dit dégénéré. Il est non dégénéré s'il assigne un unique ensemble de coordonnées à chaque point et réciproquement, de sorte qu'il existe une bijection entre les deux.

Deux droites sécantes définissent un plan et peuvent servir de système de coordonnées pour ce plan. Ce système de coordonnées rectilignes est appelé *système de coordonnées cartésiennes.*

Remarque 11. *Pour des raisons historiques, partout ailleurs dans le monde le système de coordonnées cartésiennes désigne un système de coordonnées rectilignes et orthogonales.*

Les coordonnées sont obtenues par projection des points selon des droites parallèles aux droites de coordonnées. De ce fait, le système de coordonnées cartésiennes en deux dimensions ne peut exister que dans le plan. En revanche le plan admet aussi des systèmes de coordonnées curvilignes. Lorsque les deux droites sécantes sont normales, le système est appelé *système de coordonnées rectangulaires* ou *système de coordonnées cartésiennes normales.* Un système de coordonnées a donc deux caractéristiques, il peut être curviligne ou rectiligne, orthogonal ou non orthogonal.

Imaginons trois droites non coplanaires sécantes en un point, elles forment un système de coordonnées cartésiennes d'un espace à trois dimensions nécessairement plat, c'est-à-dire euclidien ou pseudo-euclidien. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets de nombres réels (un n-uplet est une liste ordonnée de n objets) muni du produit scalaire euclidien est un espace euclidien de dimension n. Les n-uplets de réels ne sont en fait que les coordonnées cartésiennes des points de l'espace euclidien.

Définition 7.3.3. *Hyperplans*
Les hyperplans sont des espaces topologiques sans courbure, de dimension $n-1$ plongés dans un espace topologique de dimension n.

Définition 7.3.4. *Hypersurfaces*
Les hypersurfaces sont des espaces topologiques de dimension $n-1$ plongés dans un espace topologique de dimension n.

Définition 7.3.5. *Courbe paramétrique*
Dans un espace topologique à n dimensions de système de coordonnées (x_i), une courbe paramétrique de paramètre λ est l'ensemble des points tels que chaque coordonnée est une fonction de λ :

$$\forall i = 1, \ldots, n, \qquad x^i = x^i(\lambda)$$

En physique les paramètres habituels sont le temps ou l'abscisse curviligne (la distance parcourue le long de la courbe à partir d'un point de la courbe pris pour origine).

Définition 7.3.6. *Ligne de coordonnée*
Dans un système de coordonnées (x^i), une ligne de coordonnée est le lieu des points pour lesquels seule la coordonnée x^j varie. Soient λ un paramètre et c^i des constantes :

$$x^j = x^j(\lambda)$$
$$\forall i \neq j, \quad x^i = c^i$$

En un point d'un espace topologique de dimension n se croisent n lignes de coordonnée.

Exemple 7.3.1. *Courbe en coordonnées sphériques sur une sphère de rayon a*

$$\mathscr{C}(\lambda) \quad : \quad \begin{cases} r = a \\ \theta = \lambda \\ \phi = \phi(\lambda) \end{cases}$$

Définition 7.3.7. *Hypersurface de coordonnée*
Une hypersurface de coordonnée est l'ensemble des points dont une des coordonnées reste constante :

$$x^j = c^{ste}$$

Dans un espace topologique de dimension 2, les hypersurfaces de coordonnée sont simplement les lignes de coordonnée. Par exemple l'hypersurface de coordonnée $x^1 = c^1$ se confond avec la ligne de coordonnée x^2.

Dans un espace topologique de dimension 3, les hypersurfaces de coordonnée sont les surfaces de coordonnée, elles se coupent deux à deux suivant les lignes de coordonnée.

7.4 Métrique de l'espace euclidien

Coordonnées rectangulaires ou cartésiennes normales

Dans ce système de coordonnées les lignes de coordonnées sont des droites qui se coupent à angle droit. Ces systèmes de coordonnées ne sont possibles que dans les espaces plats, c'est-à-dire euclidiens ou pseudo-euclidiens.

Dans le plan, en coordonnées rectangulaires (x, y) le carré de la longueur, appelée *métrique*, est donné par le théorème de Pythagore :

$$s^2 = x^2 + y^2$$

C'est la *forme quadratique associée au plan en coordonnées rectangulaires* :

$$Q(x, y) = x^2 + y^2$$

Elle a pour signature $(2, 0)$ et pour rang 2. D'après la définition 5.0.13 p. 45, elle est définie positive. La loi d'inertie de Sylvester nous dit qu'elle sera définie positive quel que soit le système de coordonnées employé. La métrique s'écrit :

$$s^2 = g_{xx}x^2 + g_{yy}y^2$$

Les coefficients de la métrique, $g_{xx} = 1$ et $g_{yy} = 1$, sont les composantes du *tenseur métrique* du plan en coordonnées rectangulaires. En notation matricielle puis en notation indicielle avec la convention de sommation sur les indices répétés :

$$\begin{aligned} s^2 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \delta_{ij} x^i x^j \end{aligned}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Un tenseur métrique dont toutes les composantes sont constantes n'est possible que dans les espaces plats (euclidiens et pseudo-euclidiens).

On généralise à l'espace, en coordonnées rectangulaires (x, y, z) la métrique est donnée par la double application du théorème de Pythagore, d'abord dans un plan puis dans l'espace :

$$\begin{aligned} s^2 &= \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= g_{xx} x^2 + g_{yy} y^2 + g_{zz} z^2 \\ &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \delta_{ij} x^i x^j \end{aligned}$$

g_{xx}, g_{yy}, g_{zz} sont les composantes du tenseur métrique de l'espace euclidien en coordonnées rectangulaires. La forme quadratique associée à l'espace euclidien en coordonnées rectangulaires

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

a pour signature $(3, 0)$ et pour rang 3. La signature est souvent donnée sous forme explicite $(+ + +)$. Elle est définie positive.

Pour pouvoir l'intégrer le long d'une courbe, la métrique est donnée sous forme différentielle :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{17}$$

ds^2 est le carré de l'élément de longueur (élémentaire dans le sens de infinitésimal).

Remarque 12. *L'opérateur carré est prioritaire sur celui de différentiation, par exemple*

$$\begin{aligned} dx^2/dx &= 2x \\ dx^2 &= 2xdx \end{aligned}$$

dx^2 est donc un infiniment petit du premier ordre. En toute rigueur il faudrait écrire

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

pour le carré de la distance infinitésimale qui est un infiniment petit du deuxième ordre. Néanmoins nous supprimons les parenthèses pour alléger la notation, la confusion étant peu probable.

Coordonnées cartésiennes

Dans ce système de coordonnées aussi appelées coordonnées affines, ou rectilignes obliques, les lignes de coordonnées sont des droites. Nous verrons que ces systèmes de coordonnées peuvent toujours se ramener par changement de variables à un système de coordonnées rectangulaire. Les coordonnées cartésiennes ne sont donc possibles que dans les espaces plats.

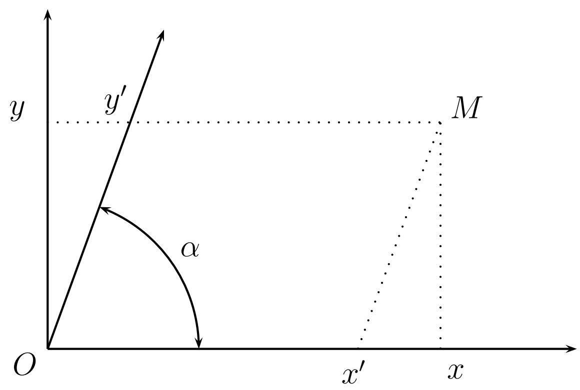


FIG. 7.1 – Coordonnées cartésiennes (x', y')

Transformation des coordonnées cartésiennes en rectangulaires

$$T \quad : \quad \begin{cases} x = x' + y' \cos(\alpha) \\ y = y' \sin(\alpha) \end{cases}$$

Transformation des coordonnées rectangulaires en cartésiennes

$$\bar{T} \quad : \quad \begin{cases} x' = x - y' \cos(\alpha) \\ y' = \dfrac{y}{\sin(\alpha)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = x - \dfrac{y}{\tan \alpha} \\ y' = \dfrac{y}{\sin(\alpha)} \end{cases}$$

En coordonnées cartésiennes la métrique du plan s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial x'} dx' + \frac{\partial x}{\partial y'} dy' \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x'} dx' + \frac{\partial y}{\partial y'} dy' \right)^2 \\ &= (dx' + \cos(\alpha) dy')^2 + (\sin(\alpha) dy')^2 \\ &= dx'^2 + 2 \cos(\alpha) dx' dy' + \cos^2 \alpha dy'^2 + \sin^2 \alpha dy'^2 \\ &= dx'^2 + 2 \cos(\alpha) dx' dy' + dy'^2 \end{aligned} \tag{18}$$

En coordonnées cartésiennes (et cartésiennes normales), la métrique est une somme à coefficients constants, ici 1 puis $2\cos(\alpha)$ et à nouveau 1. Une conséquence de la réduction de Gauss est que la métrique en coordonnées cartésiennes peut toujours se ramener à une métrique en coordonnées rectangulaires.

Sous forme différentielle, la métrique s'écrit :

$$ds^2 = g_{x'x'} dx'^2 + 2 g_{x'y'} dx' dy' + g_{y'y'} dy'^2$$

$g_{x'x'}, g_{x'y'}, g_{y'y'}$ sont les composantes (constantes) du tenseur métrique du plan en coordonnées cartésiennes.

Coordonnées curvilignes

Dans ce système de coordonnées qui peut être orthogonal ou oblique, les lignes de coordonnées ne sont pas des droites. Au moins un coefficient de la métrique (une composante du tenseur métrique) est fonction des coordonnées.

Coordonnées orthogonales

Dans ce système de coordonnées qui peut être rectiligne ou curviligne, les lignes de coordonnées se coupent à angle droit. La métrique ne contient que des carrés, elle n'a pas de terme croisé (ou rectangle), du type xy.

Coordonnées obliques

Dans ce système de coordonnées qui peut être rectiligne ou curviligne, les lignes de coordonnées ne se coupent pas à angle droit. La métrique contient au moins un terme croisé.

Coordonnées polaires

C'est l'archétype des systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales du plan. En faisant varier la distance radiale à l'origine ρ et l'angle θ on parcourt l'ensemble des points du plan. Les coordonnées polaires (ρ, θ) forment donc un système de coordonnées pour le plan. Contrairement aux coordonnées rectilignes, elles sont applicables ailleurs que dans le plan, par exemple à la surface d'une sphère. Pour le mettre en place dans le plan, il faut se donner les mêmes éléments que pour le système de coordonnées rectangulaire en deux dimensions, c'est-à-dire deux points du plan et une unité de longueur. Il n'est pas nécessaire de se donner une unité d'angle car le tour et ses fractions sont des unités naturelles, en revanche il faut se donner une orientation (un sens de parcours positif pour les angles).

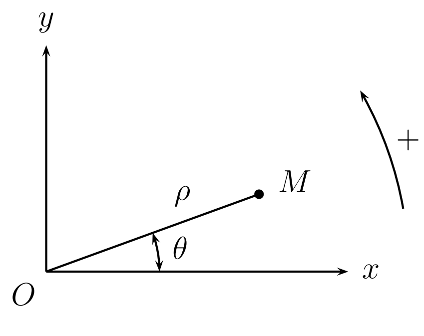


Fig. 7.2 – Coordonnées polaires (ρ, θ)

C'est un système de coordonnées curvilignes orthogonales car les cercles coupent leurs rayons à angle droit. Il est dégénéré à l'origine des coordonnées, en ce point l'angle θ est indéterminé, cependant la dégénéréscence est facilement levée en passant aux coordonnées rectangulaires.

Transformation des coordonnées polaires en rectangulaires

$$T \quad : \quad \begin{cases} x\,(\rho, \theta) = \rho \cos(\theta) \\ y\,(\rho, \theta) = \rho \sin(\theta) \end{cases} \qquad \rho \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi \tag{19}$$

Transformation des coordonnées rectangulaires en polaires

$$\bar{T} \quad : \quad \begin{cases} \rho\,(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta\,(x,y) = \mathrm{atan2}(y,x) \end{cases} \qquad \text{avec } \mathrm{atan2}(y,x) = \begin{cases} \arctan(y/x) \text{ si } x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi \text{ si } x < 0 \text{ et } y \geqslant 0 \\ \arctan(y/x) - \pi \text{ si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ +\,\pi/2 \text{ si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ -\,\pi/2 \text{ si } x = 0 \text{ et } y < 0 \\ \text{indéfinie si } x = 0 \text{ et } y = 0 \end{cases}$$

En coordonnées polaires la métrique du plan s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 && (20) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\,d\rho + \frac{\partial x}{\partial \theta}\,d\theta\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\,d\rho + \frac{\partial y}{\partial \theta}\,d\theta\right)^2 \\ &= (\cos(\theta)d\rho - \rho\sin(\theta)d\theta)^2 + (\sin(\theta)d\rho + \rho\cos(\theta)d\theta)^2 \\ &= \cos^2(\theta)d\rho^2 + \rho^2\sin^2(\theta)d\theta^2 - 2\rho\cos(\theta)\sin(\theta)d\rho d\theta \\ &\qquad + \sin^2(\theta)d\rho^2 + \rho^2\cos^2(\theta)d\theta^2 + 2\rho\cos(\theta)\sin(\theta)d\rho d\theta \\ &= d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 && (21) \\ &= g_{\rho\rho}d\rho^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 \end{aligned}$$

où $g_{\rho\rho} = 1$ et $g_{\theta\theta} = \rho^2$ sont les composantes du tenseur métrique du plan en coordonnées polaires. La composante $g_{\theta\theta}$ est fonction de la coordonnée ρ. La transformation de coordonnées (19) permet de retrouver un tenseur métrique avec des composantes constantes. Lorsque les composantes sont fonction des coordonnées, la métrique ne peut être donnée que sous forme différentielle car elle varie d'un point à l'autre.

Coordonnées cylindriques

Elles sont identiques aux coordonnées polaires, avec la coordonnée supplémentaire z. C'est un système de coordonnées curvilignes orthogonales pour l'espace à trois dimensions. Lorsqu'on l'utilise en deux dimensions pour une surface cylindrique en fixant ρ, le centre du système de coordonnées n'appartient pas au cylindre. Pour que le centre du système de coordonnées soit sur la surface cylindrique, on peut la dérouler pour en faire un plan, et utiliser les coordonnées rectangulaires ou polaires à sa surface. Les lignes de coordonnées sont alors des droites du plan, mais aussi des courbes dans l'espace à trois dimensions dans lequel est plongé le cylindre.

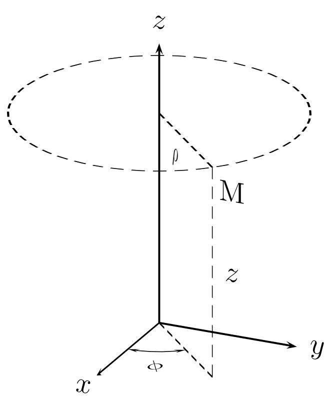


Fig. 7.3 – Coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z)

Transformation des coordonnées cylindriques en rectangulaires

$$T \quad : \quad \begin{cases} x = \rho\cos(\phi) \\ y = \rho\sin(\phi) \\ z = z' \end{cases} \qquad \rho \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \phi < 2\pi, \qquad -\infty < z' < +\infty$$

Transformation des coordonnées rectangulaires en cylindriques

$$\bar{T} \quad : \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \mathrm{atan2}(y, x) \\ z' = z \end{cases}$$

La surface de coordonnée $\rho = c^{ste}$ est le cylindre d'axe z.
La surface de coordonnée $\phi = c^{ste}$ est le demi-plan limité par l'axe z.
La surface de coordonnée $z' = c^{ste}$ est le plan parallèle au plan (x, y).

En coordonnées cylindriques la métrique s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\,d\rho + \frac{\partial x}{\partial \phi}\,d\phi + \frac{\partial x}{\partial z'}\,dz'\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\,d\rho + \frac{\partial y}{\partial \phi}\,d\phi + \frac{\partial y}{\partial z'}\,dz'\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\,d\rho + \frac{\partial z}{\partial \phi}\,d\phi + \frac{\partial z}{\partial z'}\,dz'\right)^2 \\ &= (\cos(\phi)d\rho - \rho\sin(\phi)d\phi)^2 + (\sin(\phi)d\rho + \rho\cos(\phi)d\phi)^2 + dz'^2 \\ &= d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \end{aligned}$$

Coordonnées sphériques

C'est aussi un système de coordonnées curvilignes orthogonales pour l'espace à trois dimensions. Lorsqu'on l'utilise en deux dimensions pour une sphère en fixant le rayon, le centre du système de coordonnées n'appartient pas à la sphère.

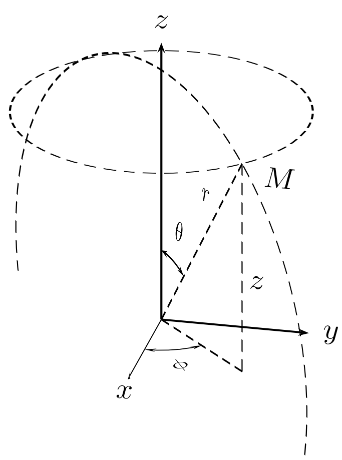


FIG. 7.4 – Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

Transformation des coordonnées sphériques en rectangulaires

$$T \quad : \quad \begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases} \qquad r \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \theta < \pi, \qquad 0 \leqslant \phi < 2\pi$$

Transformation des coordonnées rectangulaires en sphériques

$$\bar{T} \quad : \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \text{atan2}\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) \\ \phi = \text{atan2}\,(y, x) \end{cases}$$

Pour trouver l'expression de la métrique en coordonnées sphériques, partons de son expression en coordonnées rectangulaires :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

En différentiant la transformation T :

$$\begin{cases} dx = \partial_r x\, dr + \partial_\theta x\, d\theta + \partial_\phi x\, d\phi \\ dy = \partial_r y\, dr + \partial_\theta y\, d\theta + \partial_\phi y\, d\phi \\ dz = \partial_r z\, dr + \partial_\theta z\, d\theta + \partial_\phi z\, d\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \sin\theta\cos\phi\, dr + r\cos\theta\cos\phi\, d\theta - r\sin\theta\sin\phi\, d\phi \\ dy = \sin\theta\sin\phi\, dr + r\cos\theta\sin\phi\, d\theta + r\sin\theta\cos\phi\, d\phi \\ dz = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \end{cases}$$

La somme des carrés donne l'expression cherchée :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta)\, d\phi^2 \tag{22}$$

Transformation des coordonnées sphériques en cylindriques, et cylindriques en sphériques

$$\begin{cases} \rho = r\sin(\theta) \\ z = r\cos(\theta) \\ \phi = \phi \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta = \text{atan2}\,(\rho, z) \\ \phi = \phi \end{cases}$$

Dans un *système de coordonnées générales*, la métrique de l'espace euclidien en trois dimensions s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + 2g_{13}dx^1dx^3 + g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{23}dx^2dx^3 + g_{33}(dx^3)^2 \\ &= g_{ij}dx^idx^j \end{aligned}$$

On les appelle *métrique euclidienne* et *tenseur métrique euclidien.*

7.5 Longueur d'un arc de courbe

Dans l'espace euclidien, supposons que la trajectoire d'un point M de coordonnées curvilignes (x^i) soit donnée en fonction d'un paramètre λ (habituellement le temps ou l'abscisse curviligne), $x^i = x^i(\lambda)$, variant sur un intervalle (λ_0, λ_1). La longueur Γ de l'arc de courbe décrit par M est alors donnée par l'intégrale de la métrique définie positive :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{s_0}^{s_1} ds \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{g_{ij}dx^idx^j} \end{aligned} \tag{23}$$

En faisant apparaitre le paramètre λ :

$$\boxed{\Gamma = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}}\, d\lambda}$$

La longueur de l'arc de courbe est indépendante du choix du paramètre. En effet, soit un nouveau paramètre fonction de l'ancien :

$$\mu = \phi(\lambda)$$
$$d\mu = \frac{\partial \phi(\lambda)}{\partial \lambda}\, d\lambda$$
$$\forall i \quad \frac{dx^i}{d\lambda} = \frac{dx^i}{d\mu}\frac{\partial \phi(\lambda)}{\partial \lambda}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{d\mu}\frac{dx^j}{d\mu}\left[\frac{\partial \phi(\lambda)}{\partial \lambda}\right]^2}\, d\lambda \\
&= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{d\mu}\frac{dx^j}{d\mu}}\,\frac{\partial \phi(\lambda)}{\partial \lambda}\, d\lambda \\
&= \int_{\phi(\lambda_0)}^{\phi(\lambda_1)} \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{d\mu}\frac{dx^j}{d\mu}}\, d\mu
\end{aligned}$$

En coordonnées rectangulaires :

$$\Gamma = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Il nous faut les fonctions x, y, z qui définissent la courbe. Les coordonnées peuvent être fonction les unes des autres, cependant nous prenons le cas plus général des équations paramétriques.

Exemple 7.5.1. *La fonction $y = \sin(x^2+1)$ peut être paramétrée de plusieurs façons :*

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sin(t^2+1) \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = t^2 \\ y = \sin(x+1) \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = t^2+1 \\ y = \sin(x) \end{cases}$$

Sans perte de généralité, nous supposons que les coordonnées sont fonction du même paramètre t. La courbe a pour équations paramétriques $x^i = x^i(t)$. Pour t variant de t_0 à t_1, sa longueur s'écrit :

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \int_{t_0}^{t_1} ds(t) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{dx^2(t) + dy^2(t) + dz^2(t)} \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}dt\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}dt\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}dt\right)^2} \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2}\, dt
\end{aligned}$$

Dans les espaces euclidiens, nous pouvons passer librement d'un paramètre quelconque à une paramétrisation par l'abscisse curviligne. Elle a pour expression en fonction du paramètre t

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}}\, d\tau$$

et la courbe a pour longueur

$$\Gamma = s(t_1)$$

Le passage d'un paramètre à l'autre s'effectue grâce à la relation :

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}$$

Exemple 7.5.2. *Soit la courbe paramétrique :*

$$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 4t + 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = 3 \\ \dot{y} = 4 \end{cases}$$

où le point désigne la dérivation par rapport à t.

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{3^2 + 4^2} d\tau \\ &= 5t \end{aligned}$$

Avec cette relation nous pouvons paramétrer la courbe avec l'abscisse curviligne :

$$\begin{cases} x = \dfrac{3s}{5} - 1 \\ y = \dfrac{4s}{5} + 2 \end{cases}$$

En coordonnées cartésiennes, supposons que les coordonnées x et y soient fonction du paramètre t. La relation (18) p. 61 donne la longueur d'une courbe $\mathscr{C}$: $x = x(t); y = y(t)$:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{t_0}^{t_1} ds(t) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{dx^2(t) + 2\cos(\alpha) dx(t) dy(t) + dy^2(t)} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\cos(\alpha)\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} dt \end{aligned}$$

En coordonnées polaires, supposons que les coordonnées ρ et θ soient fonction du paramètre t. La longueur d'une courbe $\mathscr{C}$: $\rho = \rho(t); \theta = \theta(t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{t_0}^{t_1} ds(t) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{d\rho^2(t) + \rho^2 d\theta^2(t)} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2} dt \end{aligned}$$

7.6 Courbure d'une courbe

En coordonnées rectangulaires d'un espace euclidien, la courbure d'une courbe $\mathscr{C} : x^i = x^i(t)$ est le taux de variation de la tangente à cette courbe en fonction de la distance (abscisse curviligne) :

$$\kappa(s) = \sqrt{\delta_{ij} \frac{d^2x^i}{ds^2} \frac{d^2x^j}{ds^2}}$$

8

Espaces non-euclidiens

8.1 La sphère

La sphère est l'archétype de l'espace non-euclidien de dimension 2. Elle est paramétrisable par les deux angles θ et ϕ, ce dernier angle étant dégénéré aux pôles. Bien entendu la sphère n'a pas de pôles, le problème est uniquement dû au système de coordonnées utilisé. Au mieux il existe un système de coordonnées n'ayant qu'un seul pôle. Par conséquent il n'existe pas de système de coordonnées qui couvre la sphère sans dégénéréscence, l'atlas d'une sphère comprend au minimum deux cartes.

Sur une sphère de rayon r, utilisons les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) avec r constant. La métrique s'écrit :

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta)\, d\phi^2$$

Ici $g_{\theta\theta} = r^2$ avec r constant, $g_{\theta\phi} = 0$ et $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2(\theta)$ est fonction de la coordonnée θ. Il n'existe pas de système de coordonnées global à la surface de la sphère pour lequel $g_{ij} = \delta_{ij}$, la courbure de la sphère est intrinsèque, contrairement à celle du cylindre. Localement en chaque point on peut définir un espace tangent de même dimension que la sphère, un plan, pour lequel $g_{ij} = \delta_{ij}$. La sphère est un espace non-euclidien, dit *sphérique*.

Remarque 13. *Sur un cylindre de rayon ρ, utilisons les coordonnées cylindrique (ρ, ϕ, z) avec ρ constant. La métrique s'écrit :*

$$ds^2 = \rho^2 d\phi^2 + dz^2$$

Les coefficients de la métrique sont bien des constantes, sa signature est $(++)$. La courbure du cylindre est extrinsèque.

Passons en coordonnées polaires sphériques (ρ, ϕ) à la surface de la sphère. On pose $\rho = \theta r$ le déplacement à la surface de la sphère ($\rho = \pi r$ d'un pôle à l'autre) :

$$\rho = \theta r$$
$$d\rho = r d\theta$$
$$d\rho^2 = r^2 d\theta^2$$

En coordonnées polaires sphériques, la métrique de la sphère s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\rho^2 + r^2 \sin^2(\rho/r)\, d\phi^2 \\ &= g_{\rho\rho} d\rho^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2 \end{aligned} \tag{24}$$

où $g_{\rho\rho} = 1$ et $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2(\rho/r)$ sont les composantes du tenseur métrique de la sphère en coordonnées polaires sphériques. Elles sont différentes des composantes du tenseur métrique du plan en coordonnées polaires. ((21) p. 63). La métrique (et le tenseur métrique) détermine la courbure intrinsèque d'un espace, mais dépend du système de coordonnées employé. Nous chercherons une fonction du tenseur métrique (et de ses dérivées) qui donne la courbure de l'espace mais qui ne dépende pas du système de coordonnées. Nous verrons également les conditions pour qu'une matrice soit effectivement un tenseur métrique.

8.2 Métrique d'une surface

Soit une surface non plane plongée dans un espace euclidien de dimension 3. C'est un exemple général d'espace non-euclidien de dimension 2. En coordonnées cartésiennes (x^i), une surface est l'ensemble des point P de coordonnées (x^1, x^2, x^3) satisfaisant la relation

$$f(x^1, x^2, x^3) = 0$$

Sous certaines conditions que l'on suppose réalisées, on peut réécrire cette relation sous la forme

$$x^3 = g(x^1, x^2) \tag{25}$$

qui montre le caractère bidimentionnel de la surface. Les coordonnées x^1 et x^2 varient librement dans le plan $x^3 = 0$ et la fonction g donne la valeur de x^3. La situation est donc asymétrique et de plus la fonction f ne permet pas de représenter toutes les surfaces, par exemple les surfaces fermées. Par analogie avec (25) on introduit deux paramètres u^1 et u^2 qui varient dans un domaine Δ du plan (u^1, u^2). Les trois fonctions

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad x^i = x^i(u^1, u^2)$$

sont un sous-ensemble bidimentionnel de points dans l'espace euclidien de dimension 3 en coordonnées cartésiennes (x^i). Les fonctions $x^i(u^1, u^2)$ sont supposées suffisamment différentiables dans le domaine de définition Δ. La situation est à nouveau symétrique. C'est la représentation d'une surface en paramètres de Gauss. On peut concevoir u^1 et u^2 comme des coordonnées de surface, de la surface. Le choix des paramètres de Gauss est sans limites, nous pouvons changer de paramètres en posant les deux relations inversibles suivantes :

$$\forall j = 1, 2 \quad v^j = v^j(u^1, u^2)$$

v^1 et v^2 sont aussi des coordonnées pour la surface. Supposons donc que l'on ait

$$\forall i = 1, 2, 3 \qquad x^i = x^i(u^1, u^2)$$

cela nous place de fait sur la surface. La métrique de la surface peut toujours s'écrire localement en coordonnées cartésiennes normales grâce au théorème de Pythagore en trois dimensions :

$$\begin{aligned} ds^2(u^1, u^2) &= (dx^1)^2(u^1, u^2) + d(x^2)^2(u^1, u^2) + d(x^3)^2(u^1, u^2) \\ &= \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2(u^1, u^2) \end{aligned}$$

Elle contient toute l'information concerant la courbure intrinsèque de la surface, autrement dit toute l'information dont on a besoin concernant la surface. Nous n'avons pas besoin de plonger la surface dans un espace de dimension supérieur pour étudier sa courbure intrinsèque.

Comme l'on reste au niveau local, nous pouvons considérer le plan tangent à la surface en ce point. En choisissant correctement l'orientation du système de coordonnées au point considéré, cela revient en fait à poser $x^3 = 0$ et à prendre le plan (x^1, x^2) comme plan tangent. La métrique locale de la surface peut toujours s'écrire en coordonnées cartésiennes normales grâce au théorème de Pythagore en deux dimensions :

$$\begin{aligned}
ds^2(u^1,u^2) &= (dx^1)^2(u^1,u^2) + d(x^2)^2(u^1,u^2) \\
&= \sum_{i=1}^{2} (dx^i)^2(u^1,u^2) \\
&= \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x^i}{\partial u^2} du^2 \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^1} \right)^2 (du^1)^2 + 2 \frac{\partial x^i}{\partial u^1} \frac{\partial x^i}{\partial u^2} du^1 du^2 + \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^2} \right)^2 (du^2)^2 \\
&= g_{11} du^1 du^1 + 2 g_{12} du^1 du^2 + g_{22} du^2 du^2 \\
&= E du^1 du^1 + 2F du^1 du^2 + G du^2 du^2
\end{aligned}$$

appelée première forme quadratique fondamentale de la surface considérée.

$$\begin{aligned}
ds^2(u^1,u^2) &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial x^i}{\partial u_j} \frac{\partial x^i}{\partial u_k} du^j du^k \\
&= g_{jk} du^j du^k
\end{aligned} \tag{26}$$

où l'objet géométrique à deux indices et quatre composantes

$$g_{jk} \triangleq \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial x^i}{\partial u^j} \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \tag{27}$$

est appelé *tenseur métrique*. Le nombre d'indices est appelé l'ordre du tenseur, le tenseur métrique est d'ordre deux. Dans un espace de dimension n, le tenseur métrique a n^2 composantes. L'égalité

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2$$

montre que les termes carrés g_{11} et g_{22} du tenseur métrique indiquent le carré de l'échelle qui a été appliquée en chaque point au système de coordonnées rectangulaires. Le terme rectangle g_{12} apparait lorsque le système de coordonnées u^i est oblique. Le tenseur métrique donne en quelque sorte l'écart au système de coordonnées orthonormées.

Exemple 8.2.1. *Si le système de coordonnées (u^1, u^2) est tel que*

$$\begin{cases} x^1(u^1) = 2u^1 \\ x^2(u^2) = u^2 \end{cases}$$

alors un point de coordonnée $u^1 = 1$ a aussi pour coordonnée $x^1 = 2$. L'échelle u^1 est deux fois plus grande que l'échelle x^1. D'après (27) *p. 71*

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^1} \right)^2 = 4$$

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 = 4(du^1)^2 + (du^2)^2$$

D'après (26) p. 71, si les coordonnées de Gauss sont fonction du paramètre α, la longueur d'une courbe du point a au point b a pour expression :

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b ds \\ &= \int_a^b \sqrt{g_{jk} du^j du^k} \\ &= \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sqrt{g_{jk} \frac{\partial u^j}{\partial \alpha} \frac{\partial u^k}{\partial \alpha}}\, d\alpha \end{aligned}$$

Notez que lorsque la variation de L est nulle, $\delta L = 0$, le trajet entre les points a et b est extrémal.

9

Espaces pseudo-euclidiens

L'espace de la relativité restreinte, appelé espace de Minkowski ou espace-temps de Poincaré-Minkowski, est l'exemple prototypique d'un espace pseudo-euclidien.

9.1 Référentiels et principe de relativité

Définition 9.1.1. *Référentiel*
Un référentiel est un espace muni d'un système de coordonnées, et un temps mesuré par une horloge fixe dans cet espace.

Définition 9.1.2. *Principe de relativité*
Parmi tous les référentiels possibles, il existe un ensemble infini continu de référentiels dans lesquels les lois de la physique s'écrivent sous la même forme mathématique.

Définition 9.1.3. *Référentiels équivalents*
Les référentiels dans lesquels les lois de la physique s'écrivent sous la même forme mathématique sont dits équivalents.

Définition 9.1.4. *Référentiel galiléen*
Les référentiels équivalents qui se déplacent d'un mouvement de translation rectiligne uniforme (à vecteur vitesse constant) par rapport aux étoiles lointaines sont appelés référentiels galiléens.

Définition 9.1.5. *Configuration standard*
Deux référentiels galiléens sont en configuration standard si :

- *les centres des référentiels se croisent et se superposent à l'instant* $t_0 = t'_0 = 0$
- *on utilise les coordonnées galiléennes* (t, x, y, z)*, les repères sont orthonormés directs, l'axe du temps est représenté normal à* Ox*, à* Oy *et à* Oz
- *le mouvement rectiligne n'a lieu que selon les axes* Ox *et* $O'x'$ *parallèles et de même sens (confondus car les centres se superposent),* $v_{ey} = v'_{ey'} = v_{ez} = v'_{ez'} = 0$
- *le mouvement de translation est tel que les axes* Oy *et* $O'y'$ *sont parallèles, donc aussi les axes* Oz *et* $O'z'$ *(pas de rotation statique)*
- *le mouvement uniforme de* $\mathcal{R}'$ *est dans le sens des* x *croissants. La vitesse d'entrainement de* $\mathcal{R}'$ *dans* $\mathcal{R}$ *selon l'axe* Ox *est positive ou nulle,* $v_{ex} = \|\vec{v}_e\| = v_e > 0$

9.2 Invariants relativistes

On postule l'existence d'une vitesse limite notée c. Cette vitesse est donc invariante par changement de référentiel galiléen, elle a même valeur pour tous les observateurs galiléens sinon nous pourrions la dépacer par changement de référentiel. À un changement de référentiel correspond une transformation des coordonnées spatio-temporelles, chaque référentiel ayant a priori son propre système de coordonnées spatio-temporelles. La transformation de coordonnées spatio-temporelles que l'on cherche doit laisser invariante c.

À partir de la vitesse limite on peut trouver un deuxième invariant relativiste qui fait intervenir les coordonnées spatio-temporelles. Soient deux référentiels galiléens $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en configuration standard avec la vitesse relative d'entrainement V. Imaginons qu'à l'origine spatiale $O(0, 0, 0)$ de $\mathcal{R}$ se produise un flash à l'instant initial $t_0 = t'_0 = 0$. Pour simplifier, on suppose que la lumière se propage à la vitesse limite c. Un observateur dans $\mathcal{R}$ verra une sphère de lumière de centre O s'étendre dans l'espace, d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$

En relativité restreinte comme en physique non relativiste, un observateur dans $\mathcal{R}'$ verra aussi une sphère de lumière s'étendre dans l'espace. Cependant, par invariance de c, en relativité la sphère de lumière vue par un observateur dans $\mathcal{R}'$ n'a pas pour centre O mais O', et a pour équation dans $\mathcal{R}'$:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$$

L'équation de la sphère de lumière est invariante par changement de référentiels galiléens, c'est un invariant relativiste.

9.3 Équation de la sphère de lumière

L'équation de la sphère de lumière étant la même dans tous les référentiels galiléens cela suggère de poser au choix

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right) \qquad \text{ou} \qquad \Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2$$

Nous choisissons la convention de genre temps, l'autre étant la convention de genre espace :

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \tag{28}$$

Cette expression rappelle celle du carré de la distance euclidienne en trois dimensions d'espace. Or, si s^2 est nul dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, alors il est nul dans tout autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'$, autrement dit s et s' sont proportionnels :

$$s = \alpha s'$$

9.4 Espace homogène et isotrope, temps homogène

L'espace étant supposé homogène (toute expérience donne le même résultat indépendamment de l'endroit où elle est faite), le facteur de proportionnalité α ne peut être fonction des coordonnées. Le temps étant également supposé homogène (toute expérience donne le même résultat indépendamment de l'époque à laquelle elle est faite), α ne peut être fonction du temps. L'espace étant supposé isotrope (toute expérience donne le même résultat indépendamment de l'orientation choisie dans l'espace), α ne peut être fonction de la direction de la vitesse relative des référentiels. α n'est donc fonction que de la norme de la vitesse relative des référentiels :

$$s = \alpha(\mathrm{V})s'$$

9.5 Loi de composition interne

Si l'on considére trois référentiels d'inertie nous avons

$$\begin{cases} s_1 = \alpha(\mathrm{V}_{12})s_2 \\ s_2 = \alpha(\mathrm{V}_{23})s_3 \\ s_1 = \alpha(\mathrm{V}_{13})s_3 \end{cases}$$

soit,

$$\begin{aligned} s_1 &= \alpha(\mathrm{V}_{12})\alpha(\mathrm{V}_{23})s_3 \\ \alpha(\mathrm{V}_{13}) &= \alpha(\mathrm{V}_{12})\alpha(\mathrm{V}_{23}) \end{aligned}$$

Cette relation est impossible car V_{13} dépend non seulement des valeurs V_{12} et V_{23}, mais aussi de l'angle entre les vecteurs $\mathbf{V}_{12}$ et $\mathbf{V}_{23}$. Par conséquent α est une constante et nous avons :

$$\alpha = \alpha^2$$

Cela laisse deux possibilités, $\alpha = 0$ donne $s = 0$ ce qui est impossible, donc $\alpha = 1$ et :

$$s = s' \tag{29}$$

9.6 Intervalle d'univers

s est une distance spatio-temporelle quadridimentionnelle, invariante par changement de référentiel galiléen, donc absolue dans l'espace-temps. Cette distance dans l'espace-temps entre deux évènements est appelée *intervalle d'univers* ou *distance d'univers* ou *intervalle d'espace-temps* ou *métrique de l'espace-temps*. Elle a même valeur dans tout référentiel galiléen. À partir de (28) p. 75, considèrons deux évènements infiniment proches (t, x, y, z) et $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$:

$$\boxed{ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \tag{30}$$

Si les deux évènements appartiennent à une trajectoire décrite avec une vitesse $v(t)$, nous avons $dx^2 + dy^2 + dz^2 = v^2(t)dt^2$:

$$ds^2 = \left[c^2 - v^2(t)\right] dt^2 \tag{31}$$

Si $v(t)$ est inférieure à c alors $ds^2 > 0$ et s est réel dans la convention de genre temps. Pour un déplacement à la vitesse limite, l'intervalle d'univers ds est nul.

Nous sommes ainsi conduits, en relativité restreinte, à douer la variété d'univers V_4 de la métrique définie par la forme quadratique différentielle (30), appelée *métrique de Minkowski*. Cette métrique étant à coefficients constants en coordonnées rectangulaires appelées *coordonnées galiléennes* (t, x, y, z), elle définit V_4 comme un espace pseudo-euclidien : le « pseudo » vient du fait que la métrique n'a pas que des signes positifs ou que des signes négatifs, le « euclidien » vient des coefficients constants en coordonnées galiléennes. À cet espace on donne le nom d'espace-temps de Poincaré-Minkowski.

L'espace-temps de la relativité restreinte est un espace riemannien pseudo-euclidien. Nous verrons qu'il est osculateur (tangent à l'ordre deux) à l'espace-temps pseudo-riemannien de la relativité générale.

Substituons aux coordonnées t, x, y, z les coordonnées galiléennes réduites (9) p. 24 : La métrique prend alors la forme :

$$ds^2 = \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2$$

Appelons $\eta_{\alpha\beta}$ le tenseur métrique de l'espace de Poincaré-Minkowski dans ce système de coordonnées, les indices grecs variant de 0 à 3 :

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

avec :

$$[\eta_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{32}$$

Le déterminant de cette matrice est négatif :

$$\begin{aligned} \eta &= 1 \times -1 \times -1 \times -1 \\ &= -1 \end{aligned} \tag{33}$$

En convention de genre espace il est aussi négatif :

$$\begin{aligned} \eta &= -1 \times 1 \times 1 \times 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

L'espace-temps de Poincaré-Minkowski peut bien entendu être rapporté à un système de coordonnées curvilignes (y^α) quelconque et la métrique s'écrit

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$$

où les $g_{\alpha\beta}$ sont fonction des coordonnées curvilignes. D'après la loi d'inertie de Sylvester 5.3 p. 49, le déterminant g est négatif également en coordonnées curvilignes. La forme quadratique associée à l'espace de Minkowski de la relativité restreinte, (28) p. 75 :

$$Q(t, x, y, z) = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

a pour signature $(1, 3)$ et pour rang 4.

9.7 Longueur d'un arc de courbe

Dans un système de coordonnées quelconque (x^α) de l'espace de Minkowski, la longueur d'une courbe $\mathscr{C} : x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$ pour $\lambda_1 \geqslant \lambda \geqslant \lambda_0$ a pour expression :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{s_0}^{s_1} ds \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\varepsilon \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \\ &= \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{\varepsilon \eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}}\, d\lambda \end{aligned}$$

où la fonction indicatrice ε est définie par :

$$\begin{cases} \varepsilon = 1 \quad \text{si} \quad \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \geqslant 0 \\ \varepsilon = -1 \quad \text{si} \quad \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta < 0 \end{cases} \tag{34}$$

Soit $\mathbf{r}(x^\alpha)$ le quadrivecteur position d'un évènement de la courbe et soit

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\lambda) &= \mathbf{r}'(\lambda) \\ &= dx^\alpha / d\lambda \end{aligned}$$

où le prime désigne la dérivation par rapport au paramètre λ. Le vecteur $\mathbf{r}'$ est en tout point tangent à la courbe, il forme un champ de vecteurs tangents. Si le paramètre est le *temps propre* τ de la particule qui décrit la courbe (temps affiché par une horloge liée à la particule), alors $\mathbf{u}(\tau)$ est la quadrivitesse de cette particule.

Pour $\lambda_1 \geqslant \lambda \geqslant \lambda_0$, la longueur s'écrit

$$\Gamma = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \|\mathbf{u}(\lambda)\| d\lambda$$

où $\|\mathbf{u}(\lambda)\|$ est la pseudo-norme de $\mathbf{u}(\lambda)$.

La métrique étant indéfinie, un arc de courbe peut avoir une longueur nulle.

Exemple 9.7.1. *Considérons la courbe paramétrique, pour $1 \geqslant \lambda \geqslant 0$:*

$$\begin{cases} x^0 = 5\lambda \\ x^1 = 3\sin\lambda \\ x^2 = 3\cos\lambda \\ x^3 = 4\lambda \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\right) &= (5, 3\cos\lambda, -3\sin\lambda, 4) \\ \varepsilon\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 &= \eta_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} \\ &= 5^2 - (3\cos\lambda)^2 - (-3\sin\lambda)^2 - 4^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si bien que :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_0^1 0 d\lambda \\ &= 0 \end{aligned}$$

Définition 9.7.1. *Courbe nulle*
Une courbe est nulle si l'un de ses arcs est de longueur nulle. Un arc représente plus d'un point, et correspond à un intervalle $c \geqslant \lambda \geqslant d$ avec $c > d$.

Définition 9.7.2. *Arc de courbe nul en un point*
Un arc de courbe est nul au point de paramètre $\lambda = \lambda_0$ si le vecteur tangent à l'arc de courbe en ce point est nul :

$$\left.\frac{ds}{d\lambda}\right|_{\lambda_0} = 0$$

En ce point l'abscisse curviligne s arrête de croître (ou de décroître) avec le paramètre λ.

Définition 9.7.3. *Ensemble nul d'une courbe*
L'ensemble des valeurs du paramètre λ pour lesquelles l'arc de courbe est nul s'appelle l'ensemble nul de la courbe.

Un arc de courbe peut être nul sans que sa longueur soit nulle, car il suffit que l'un de ses segments soit de longueur nulle. En revanche, un arc de courbe de longueur nulle est nécessairement nul.

9.8 Courbe régulière

Pour une métrique définie positive, l'abscisse curviligne est bien définie comme une fonction strictement croissante du paramètre de la courbe (ce paramètre est lui aussi une fonction strictement croissante de l'abscisse curviligne). Nous pouvons librement passer de l'un de ces paramètres à l'autre. Ce n'est plus le cas pour un arc de courbe nul, l'abscisse curviligne ne peut plus être définie.

Définition 9.8.1. *Courbe régulière*
Une courbe est régulière si elle n'a pas de point nul, c'est-à-dire si en tout point

$$ds/d\lambda > 0 \text{ ou } ds/d\lambda < 0$$

Soit une courbe régulière donnée en fonction de son abscisse curviligne $x^\alpha = x^\alpha(s)$.

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{ds} &= \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda}\frac{d\lambda}{ds}\\ &= \frac{\mathbf{u}(\lambda)}{\|\mathbf{u}(\lambda)\|}\\ &= \mathbf{t}(\lambda)\end{aligned}$$

$\mathbf{t}(\lambda) = dx^\alpha/ds$ est le vecteur tangent unitaire en chaque point de la courbe. Lorsque le paramètre λ est le temps propre de la particule qui décrit la courbe, $\mathbf{t}(\tau)$ est sa quadrivitesse unitaire.

10

Espaces riemanniens - Variétés

10.1 Espaces riemanniens

Les espaces proprement riemanniens regroupent les espaces euclidiens (plats) et non euclidiens (courbes). La métrique proprement riemannienne est une forme différentielle quadratique définie positive. Les espaces pseudo-riemanniens regroupent les espaces pseudo-riemanniens plats, c'est-à-dire pseudo-euclidien, et pseudo-riemanniens courbes. La métrique pseudo-riemannienne est une forme différentielle quadratique indéfinie.

Les espaces riemanniens regroupent les espaces proprement riemanniens et pseudo-riemanniens. Dans le système de coordonnées (x^i), leurs métriques s'écrivent :

$$ds^2 = g_{ij}(x^i)dx^i dx^j$$

Les variétés généralisent les espaces riemanniens en levant la contrainte sur l'écriture de la métrique. Le tableau suivant récapitule les différents espaces :

Variété ou espace	Proprement r. Pré-euclidien Euclidien	Proprement r. Non-euclidien	Pseudo-riemann. Pré-euclidien Pseudo-euclidien	Pseudo-riemann. Pseudo-r. courbe
Métrique Signature	définie positive +	définie positive N/A	indéfinie + et -	indéfinie N/A
Représentation Sys. de coord. Coefficients	plat rectiligne constants	courbe curviligne f(x)	plat rectiligne constants	courbe curviligne f(x)
Application Exemple	φ classique plan	Méca. analytique sphère	Relat. restreinte esp. de Minkowski	Relat. générale trajec. Mercure

Par « Métrique » on entend forme quadratique associée au tenseur métrique ou bien matrice représentative du tenseur métrique. Les coefficients de la métrique sont les composantes du tenseur métrique.

10.1.1 Propriétés du tenseur métrique

PROPRIÉTÉS 10.1.1. *Propriétés du tenseur métrique d'un espace de Riemann*

(1) Les composantes $g_{ij}(x^i)$ sont différentiables de classe $\mathcal{C}^2$, leurs dérivées partielles secondes par rapport aux coordonnées existent et sont continues

(2) Les g_{ij} sont symétriques : $g_{ij} = g_{ji}$

(3) La matrice G est telle que sa forme quadratique différentielle associée est une distance : $g_{ij}dx^idx^j$ doit être invariante par changement de coordonnées

(4) Définie : $\forall \mathbf{u},\ g_{ij}u^iu^j = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(5) Positive : $\forall \mathbf{u},\ g_{ij}u^iu^j \geqslant 0$

Lorsque G est définie positive, le déterminant g et $g_{11}, g_{22}, \ldots, g_{nn}$ sont tous positifs. Dans les espaces pseudo-riemanniens les propriétés (4) et (5) sont remplacées par la propriété moins restrictive :

(4) La matrice G est inversible (ssi son déterminant est non nul $g \neq 0$). Elle est dite non singulière ou définie

REMARQUE 14. *G est symétrique*
Supposons que ce ne soit pas le cas et décomposons le tenseur métrique en une partie symétrique et une partie antisymétrique :

$$\forall i, j \quad g_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(g_{ij} + g_{ji}\right) + \tfrac{1}{2}\left(g_{ij} - g_{ji}\right)$$

La contribution à ds^2 de la partie antisymétrique est nulle,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\left(g_{ij} - g_{ji}\right) dx^idx^j &= \tfrac{1}{2}\left(g_{ij}dx^idx^j - g_{ji}dx^idx^j\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(g_{ij}dx^idx^j - g_{ij}dx^jdx^i\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(g_{ij}dx^idx^j - g_{ij}dx^idx^j\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

et la métrique est symétrique.

La métrique d'un espace riemannien étant symétrique, calculons le nombre d'éléments différents de la matrice G, appelés composantes indépendantes du tenseur métrique. Comptons les éléments diagonaux plus les éléments de la partie triangulaire supérieure de la matrice. Cela représente la moitié des n^2 éléments, plus la moitié restante des n éléments diagonaux, soit

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \tag{35}$$

éléments différents.

REMARQUE 15. *Si la matrice G*

(1) est définie et positive, l'espace est dit proprement riemannien : pour tout vecteur $\mathbf{v}$ non nul,

$$g_{ij}\, v^iv^j > 0$$

g et $g_{11}, g_{22}, \ldots, g_{nn}$ sont tous positifs. De plus, G^{-1} est aussi définie positive. On peut faire le rapprochement avec la définition d'un espace proprement euclidien.

(2) n'est pas définie positive, la métrique peut être positive, négative ou nulle, elle est indéfinie et l'espace est dit pseudo-riemannien. On peut faire le rapprochement avec la définition d'un espace pseudo-euclidien.

Remarque 16. *Un espace riemannien existe en lui-même et n'a nul besoin d'être plongé dans un espace de dimension supérieure pour être représenté.*

Exemple 10.1.1. *Montrons que le champ de matrice suivant est le tenseur métrique d'un espace riemannien :*

$$\begin{bmatrix} (x^1)^2 - 1 & 1 & 0 \\ 1 & (x^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{64}{9} \end{bmatrix}$$

On suppose que la métrique associée à cette matrice est invariante par changement de coordonnées.

(1) Les éléments de la matrice sont des polynômes en x^1 et x^2, donc de classe $\mathcal{C}^2$.

(2) La matrice est symétrique

(3) Par hypothèse la métrique associée est invariante par changement de coordonnées

(4) $g = \frac{64}{9}\left\{(x^2)^2\left[(x^1)^2 - 1\right] - 1\right\}$. On suppose que $\left[(x^1)^2 - 1\right] - 1 \neq 1$ pour que la matrice soit inversible.

Calculons la longueur de la courbe $\mathscr{C}(\lambda)$ d'équations paramétriques $x^i = x^i(\lambda)$:

$$\mathscr{C}(\lambda) \quad : \quad \begin{cases} x^1 = 2\lambda - 1 \\ x^2 = 2\lambda^2 \\ x^3 = \lambda^3 \end{cases} \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$$

Le carré de la dérivée de la distance élémentaire s'écrit :

$$\varepsilon\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = g_{ij}\,\frac{dx^i}{d\lambda}\,\frac{dx^j}{d\lambda}$$

En notation matricielle :

$$\begin{aligned}
\varepsilon\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 &= \left(\frac{dx^i}{d\lambda}\right)^T G \left(\frac{dx^j}{d\lambda}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 4\lambda & 3\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} (2\lambda-1)^2 - 1 & 1 & 0 \\ 1 & (2\lambda^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{64}{9} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4\lambda \\ 3\lambda^2 \end{pmatrix} \\
&= 64\lambda^6 + 64\lambda^4 + 16\lambda^2
\end{aligned}$$

donc $\varepsilon = 1$.

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = \left(8\lambda^3 + 4\lambda\right)^2$$

$$\frac{ds}{d\lambda} = 8\lambda^3 + 4\lambda$$

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^1 ds = \int_0^1 \left(8\lambda^3 + 4\lambda\right) d\lambda = \left[2\lambda^4 + 2\lambda^2\right]_0^1 = 4$$

10.2 Variétés

10.2.1 Définitions

Tout système de n variables indépendantes $x^i(i = 1, \ldots, n)$ occupant un certain domaine constitue une variété à n dimensions. En général il n'est pas possible de couvrir une variété avec un seul système de coordonnées qui ne soit pas dégénéré (voir la définition 7.3.2 p. 57). Lorsque l'on ne peut pas lever la dégénérescence par changement de coordonnées on couvre la variété avec des *cartes*, en référence aux cartes de géographie, chaque carte étant un système de coordonnée couvrant une partie de la variété. L'ensemble des cartes nécessaire pour couvrir toute la variété forme un *atlas*.

Plus le triangle tracé sur une sphère est petit, plus la somme de ses angles tend vers π et son aire vers celle d'un triangle plat. Au voisinage infinitésimal d'un point, c'est-à-dire « localement », la surface de la sphère est assimilable au plan qui lui est tangent en ce point, autrement dit à l'espace euclidien tangent de même dimension.

Définition 10.2.1. *Homéomorphisme*
Deux espaces topologiques sont homéomorphes s'il existe une application d'un espace dans l'autre, qui soit continue, bijective, et d'inverse continue.

C'est un isomorphisme topologique.

Définition 10.2.2. *Variété*
Une variété (ou variété topologique), de dimension n, est un espace topologique localement homéomorphe à un espace euclidien E_n de même dimension n.

Ces espaces sont localement équivalents.

Définition 10.2.3. *Variété différentielle*
Une variété différentielle (ou différentiable) est une variété sur laquelle on peut faire du calcul différentiel.

La plupart des variétés en physique sont des variétés différentielles, ce qui signifie qu'elles sont continues et différentiable dans le sens suivant : une variété est continue s'il existe au voisinage de tout point d'autres points dont les coordonnées ne diffèrent qu'infinitésimalement. Nous dirons qu'elles sont continuement paramétrisables, les paramètres étant les coordonnées de la variété. Une variété est différentiable s'il est possible de définir un champ scalaire en tout point de la variété qui puisse être partout différentié. L'association des points et des valeurs des paramètres peut être vu comme une application allant des points de la variété vers les points d'un espace euclidien de même dimension. Localement, une variété ressemble donc à un espace euclidien.

Soient P et Q deux points d'une variété, infiniment proches, de coordonnées respectives x^i et $x^i + dx^i$. La distance infinitésimale entre P et Q, c'est-à-dire aussi le tenseur métrique, détermine la géométrie locale de la variété au point P. Dans le cas le plus général, le carré de la distance est une fonction des coordonnées et de leurs différentielles :

$$ds^2 = f\left(x^i, dx^i\right)$$

La distance s'exprime dans un système de coordonnées mais c'est un invariant (par changement de coordonnées), sa valeur est la même dans tous les systèmes de coordonnées.

10.2.2 Exemples

Exemple 10.2.1. *La géométrie de Finsler est une variété différentielle de dimension 2, dont le carré de la distance exprimée en coordonnées ξ et ζ a pour expression :*

$$ds^2 = \left(d\xi^4, d\zeta^4\right)^{1/2}$$

Exemple 10.2.2. *L'espace euclidien de la mécanique classique est une variété différentielle à trois dimensions. Les paramètres sont les trois coordonnées de position.*

Exemple 10.2.3. *L'espace-temps de la relativité restreinte est une variété différentielle à quatre dimensions. Les paramètres sont les trois coordonnées d'espace et celle de temps.*

Exemple 10.2.4. *L'espace des configurations d'un système dynamique à n degrés de liberté est une variété différentielle à n dimensions. À chaque point de cet espace correspond une configuration du système.*

Exemple 10.2.5. *L'espace des phases d'une particule en mécanique classique est un exemple abstrait de variété différentielle à six dimensions. Les paramètres sont les trois coordonnées de position et les trois quantités de mouvement.*

Exemple 10.2.6. *Un autre exemple abstrait est donné par l'ensemble des rotations d'un système de coordonnées rectangulaires dans un espace à trois dimensions. Les paramètres sont les angles d'Euler et l'ensemble des rotations est une variété à trois dimensions. Les coordonnées d'un point sont les trois angles d'Euler.*

11

Produit scalaire - Norme

11.1 Représentation géométrique

Tout comme les vecteurs, le produit scalaire est une notion issue de la mécanique classique. Il permet d'exprimer le *travail* d'une force. En notant f l'intensité d'une force, d le déplacement du point d'application de cette force sous l'effet de cette force, et θ l'angle que font la force et le déplacement, le travail W (work) de la force lors de ce déplacement a pour expression :

$$W = \mathrm{fd}\cos(\theta)$$

Le travail est une mesure de l'effet mécanique d'une force en l'absence de déformations. A l'origine il permettait d'évaluer l'énergie fournie par un cheval pour déplacer une charge, autrement dit le travail du cheval. La notion de travail suggère de définir une nouvelle opération sur les vecteurs.

Notons $\mathbf{d}$ le vecteur déplacement. Le produit scalaire de la force par le déplacement est la projection du vecteur force sur le vecteur déplacement :

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{d} = \mathrm{fd}\cos(\mathbf{f}, \mathbf{d})$$

Remarque 17. *Notez qu'en physique nous effectuons le produit scalaire de vecteurs qui n'appartiennent pas forcément au même espace vectoriel.*

Considérons l'espace ordinaire de la géométrie classique appliquée à la physique. À tout couple de vecteurs $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ la multiplication scalaire fait correspondre un nombre noté $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, appelé leur *produit scalaire*, tel que :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

Dans le cas particulier où $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ont même direction,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

et le produit scalaire d'un vecteur par lui-même donne le carré de sa norme euclidienne :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$$

Notation 12. *Le produit scalaire d'un vecteur avec lui-même est noté :*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \triangleq \mathbf{u}^2$$

Propriétés 11.1.1. *Propriétés du produit scalaire euclidien*

(1) Symétrie :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\theta)\\ &= \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\|\cos(-\theta)\\ &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\end{aligned}$$

(2) Distributivité par rapport à l'addition vectorielle

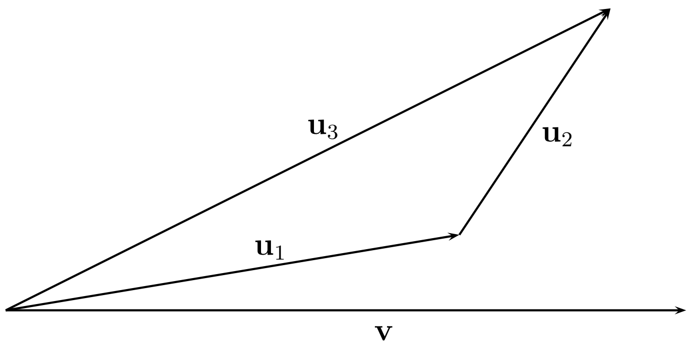


Fig. 11.1 – Distributivité du produit scalaire

Posons $\mathbf{u}_1 \oplus \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3$ *:*

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_1 \oplus \mathbf{u}_2)\cdot\mathbf{v} =& \mathbf{u}_3\cdot\mathbf{v}\\ =& \|\mathbf{u}_3\|\|\mathbf{v}\|\cos\left(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{u}_3}\right)\\ =& \|\mathbf{u}_3\|\|\mathbf{v}\|\cos[(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{u}_1})+(\widehat{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3})]\\ =& \|\mathbf{u}_3\|\|\mathbf{v}\|\left[\cos\left(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{u}_1}\right)\cos\left(\widehat{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3}\right)-\sin\left(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{u}_1}\right)\sin\left(\widehat{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3}\right)\right]\end{aligned}$$

$$= \|\mathbf{u}_3\|\|\mathbf{v}\|\left[\cos\left(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{u}_1}\right)\frac{\|\mathbf{u}_1\|+\|\mathbf{u}_2\|\cos\left(\widehat{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2}\right)}{\|\mathbf{u}_3\|}-\sin\left(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{u}_1}\right)\frac{\|\mathbf{u}_2\|\sin\left(\widehat{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2}\right)}{\|\mathbf{u}_3\|}\right]$$

$$= \|\mathbf{v}\|\left[\|\mathbf{u}_1\|\cos\left(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{u}_1}\right)+\|\mathbf{u}_2\|\cos\left(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{u}_1}\right)\cos\left(\widehat{\mathbf{x_1},\mathbf{u_2}}\right)-\|\mathbf{u}_2\|\sin\left(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{u}_1}\right)\sin\left(\widehat{\mathbf{x_1},\mathbf{u_2}}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_1 \oplus \mathbf{u}_2)\cdot\mathbf{v} &= \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}_1\|\cos\left(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{u}_1}\right)+\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}_2\|\cos\left(\widehat{\mathbf{v},\mathbf{u}_2}\right)\\ &= \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v}\end{aligned}$$

Il s'agit d'un abus de langage, il n'y a pas distributivité puisque le signe $\oplus$ *du membre de gauche est le signe opératoire de l'addition vectorielle, alors que le signe* $+$ *du membre de droite est celui de l'addition dans* $\mathbb{R}$.

(3) Associativité par rapport à la multiplication par un scalaire

Posons $\alpha \odot \mathbf{u} = \mathbf{w}$ *:*

$$\begin{aligned}(\alpha\odot\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}\\ &= \|\mathbf{w}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\theta)\\ &= \alpha\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\theta)\\ &= \alpha\times(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\end{aligned}$$

Il s'agit ici aussi d'un abus de langage, il n'y a pas associativité puisque le signe $\odot$ du membre de gauche est le signe opératoire de la multiplication d'un vecteur par un scalaire, alors que le signe $\times$ du membre de droite est la multiplication dans $\mathbb{R}$.

(4) Définie : $\forall \mathbf{u},\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} &= 0\\ \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{u}\|\cos(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{u}}) &= 0\\ \|\mathbf{u}\|^2 &= 0\\ \mathbf{u} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

(5) Positive : $\forall \mathbf{u},\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \geqslant 0$

11.2 Représentation algébrique

Par la suite, le produit scalaire a été défini de façon purement algébrique par ses propriétés.

Définition 11.2.1. *Produit scalaire euclidien*
Soient λ et μ deux scalaires, et soient $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel E. Supposons qu'il existe une loi de composition externe, de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$, notée $\cdot$, telle qu'à tout couple $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ de vecteurs de E elle fasse correspondre un scalaire de $\mathbb{R}$, noté $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, ayant les propriétés suivantes :

(1) Symétrie : $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$
On trouve parfois le terme « commutativité » bien que ce terme soit réservé aux lois de composition internes, l'application produit scalaire étant une opération externe.

(2) Bilinéarité, c'est-à-dire :

(a) Distributivité à gauche par rapport à l'addition vectorielle :

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\oplus\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$$

La symétrie implique la distributivité à droite.

(b) Multiplication à gauche par un scalaire :

$$(\lambda\odot\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \lambda\times(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$

La symétrie implique la multiplication à droite.

2a et 2b sont équivalents à la linéarité à gauche :

$$\mathbf{u}\cdot(\lambda\odot\mathbf{v}\oplus\mu\odot\mathbf{w}) = \lambda\times(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \mu\times(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})$$

La symétrie implique la linéarité à droite. La bilinéarité regroupe la linéarité à droite et à gauche.

(3) Définie : $\forall \mathbf{u},\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(4) Positive : $\forall \mathbf{u},\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \geqslant 0$

Cette loi s'appelle multiplication scalaire euclidienne de $\mathbf{u}$ par $\mathbf{v}$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, et le scalaire $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ est appelé produit scalaire euclidien des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

On parle de produit scalaire (tout court) lorsque les propriétés (3) et (4) sont remplacées par la propriété suivante :

(3) Non dégénéréscence : $\forall \mathbf{v},\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$
Cette propriété est moins contraignante car si la loi est définie alors elle est non-dégénérée. En effet, par contraposée, supposons la loi dégénérée alors

$$\exists \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \ / \ \forall \mathbf{v},\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

En particulier pour $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ nous avons

$$\exists \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \ / \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$$

et la loi n'est pas définie.

Le produit scalaire n'est pas associatif car $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ n'a pas de sens mathématique, le terme entre parenthèses étant un scalaire. Le produit scalaire ne fait pas partie intégrante de la structure d'espace vectoriel, mais est une structure supplémentaire qui peut ou non être introduite. Les espaces vectoriels munis d'un produit scalaire portent un nom particulier :

Définition 11.2.2. *Espaces vectoriels pré-euclidiens*
Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (tout court) est appelé espace vectoriel pré-euclidien.

Définition 11.2.3. *Espace vectoriel euclidien*
Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire euclidien est appelé espace vectoriel euclidien, ou proprement euclidien ou purement euclidien.

L'espace vectoriel euclidien est un cas particulier d'espace vectoriel pré-euclidien.

Définition 11.2.4. *Espace vectoriel pseudo-euclidien*
Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire indéfini (qui peut être positif, négatif ou nul) est appelé espace vectoriel pseudo-euclidien ou improprement euclidien.

L'espace vectoriel pseudo-euclidien est un cas particulier d'espace vectoriel pré-euclidien.

Remarque 18. *Les espaces vectoriels pré-euclidiens sont des espaces plats. L'existence d'un produit scalaire n'est possible que dans ces espaces, et par conséquent les définit pleinement. Dans un espace courbe, le produit scalaire n'est défini que localement dans l'espace pré-euclidien tangent.*

11.3 Expression analytique du produit scalaire

Soient **u** et **v** deux vecteurs d'un espace vectoriel pré-euclidien E_2, exprimés en composantes contravariantes dans une base quelconque $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. En utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \left(u^1\mathbf{e}_1 \oplus u^2\mathbf{e}_2\right) \cdot \left(v^1\mathbf{e}_1 \oplus v^2\mathbf{e}_2\right) \\
&= \left(v^1\mathbf{e}_1 \oplus v^2\mathbf{e}_2\right) \cdot u^1\mathbf{e}_1 + \left(v^1\mathbf{e}_1 \oplus v^2\mathbf{e}_2\right) \cdot u^2\mathbf{e}_2 \\
&= u^1\mathbf{e}_1 \cdot \left(v^1\mathbf{e}_1 \oplus v^2\mathbf{e}_2\right) + u^2\mathbf{e}_2 \cdot \left(v^1\mathbf{e}_1 \oplus v^2\mathbf{e}_2\right) \\
&= u^1\mathbf{e}_1 \cdot v^1\mathbf{e}_1 + u^1\mathbf{e}_1 \cdot v^2\mathbf{e}_2 + u^2\mathbf{e}_2 \cdot v^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 \cdot v^2\mathbf{e}_2 \\
&= u^1v^1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + u^1v^2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + u^2v^1\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + u^2v^2\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

Généralisons à un espace à n dimensions :

Soient $\mathbf{u} = u^i\mathbf{e}_i$ et $\mathbf{v} = v^j\mathbf{e}_j$ deux vecteurs d'un espace vectoriel pré-euclidien E_n :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^i\mathbf{e}_i \cdot v^j\mathbf{e}_j$$

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^iv^j\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j} \tag{36}$$

Cette relation est valable que la base soit orthogonale ou non, normée ou non, car nous n'avons pas fait d'hypothèse. Lorsque la base est orthonormée :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \delta_{ij}u^iv^j \tag{37}$$

Définition 11.3.1. *Vecteurs orthogonaux*
Deux vecteurs **u** *et* **v** *d'un espace vectoriel euclidien sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul :*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

11.4 Composantes covariantes

Le produit scalaire permet de définir les composantes covariantes. À partir d'un système de coordonnées rectilignes obliques (x^1, x^2), construisons une base normée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. En projetant le vecteur **u** perpendiculairement aux vecteurs de base, nous obtenons ses composantes covariantes :

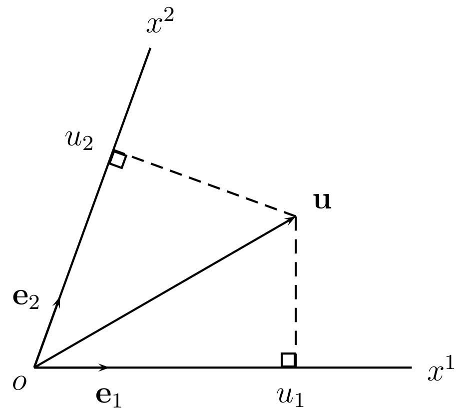


FIG. 11.2 – Composantes covariantes du vecteur $\mathbf{u}$

Nous avons :

$$u_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1$$
$$u_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2$$

REMARQUE 19. *À chaque axe de coordonnée on associe un vecteur de base tangent normé, sur lequel on définit deux composantes, l'une contravariante, l'autre covariante. La variance, c'est-à-dire le fait d'être covariant ou contravariant, ne s'applique qu'aux composantes.*

REMARQUE 20. *Bien qu'ayant un indice supérieur, les coordonnées ne sont ni contravariantes ni covariantes. Les coordonnées du point à l'extrémité d'un vecteur se confondent avec ses composantes contravariantes, ce qui justifie la position haute de leur indice.*

REMARQUE 21. *La représentation du produit scalaire comme projection orthogonale donnée figure 11.2 ne s'applique plus lorsque le produit scalaire n'est pas euclidien. Nous verrons par exemple que dans une base orthonormée de l'espace pseudo-euclidien de la relativité restreinte, les composantes contravariantes et covariantes ne sont pas confondues (paragraphe 17.3 p. 146).*

DÉFINITION 11.4.1. *Composantes covariantes*
Soit $(\mathbf{e}_i)$ *une base d'un espace vectoriel euclidien* E_n*. On appelle composantes covariantes d'un vecteur* $\mathbf{u}$*, les* n *scalaires* u_i *tels que :*

$$\forall i \quad u_i \triangleq \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i$$

Elles sont représentées au moyen d'indices inférieurs.

REMARQUE 22. *Lorsqu'un vecteur de base est multiplié par deux, la composante covariante correspondante l'est aussi, d'où son nom.*

REMARQUE 23. *La position de l'indice de numérotation des vecteurs de base* $(\mathbf{e}_i)$ *indique un lien avec la covariance (voir le paragraphe 12.8.2 p. 107).*

Bien que la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ soit normée :

$$\mathbf{u} \neq u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$$

THÉORÈME 11.4.1. *Pour que n quantités rapportées à une base d'un espace vectoriel E_n soient les composantes d'un vecteur, il faut et il suffit que ces quantités soient toutes covariantes ou toutes contravariantes par changement de base.*

Une égalité entre deux vecteurs est indépendante de la base dans laquelle on l'exprime puisque les termes de l'égalité (les vecteurs) sont invariants par changement de base. Une égalité entre deux vecteurs qui est vraie dans une base, est vraie dans toutes les bases.

11.5 Covecteurs

À tout vecteur $\mathbf{u}$ on peut associer son covecteur $\tilde{u} = (u_1, u_2)$, qui n'est autre que le vecteur $\mathbf{u}$ exprimé en composantes covariantes. Représentons $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ et projetons perpendiculairement ces vecteurs sur les axes de coordonnées x^1 et x^2 :

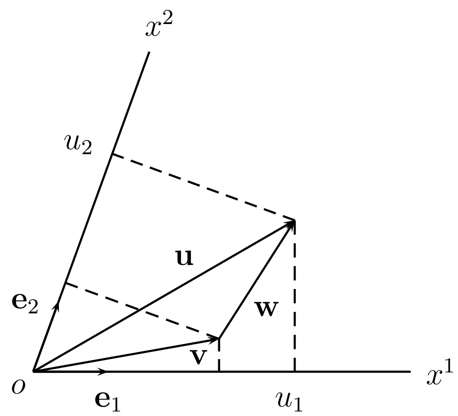


FIG. 11.3 – Composantes covariantes

Dans la base normée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ associée au système de coordonnées :

$$\begin{aligned}(v_1, v_2) \oplus (w_1, w_2) &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \\ &= (u_1, u_2) \\ \tilde{v} \oplus \tilde{w} &= \tilde{u}\end{aligned}$$

et :

$$\alpha \odot (u_1, u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2)$$

Les lois de compositions sont similaires à celles écrites en composantes contravariantes (paragraphe 3.2.3 p. 24). En effet, d'après les définitions 3.1.2 p. 15, ces lois définissent les vecteurs, et les vecteurs sont indépendants du choix de la base, donc du choix des composantes puisque des composantes contravariantes dans une base sont covariantes dans la base réciproque.

11.6 Norme

11.6.1 Norme euclidienne

Dans un système de coordonnées rectangulaires, le théorème de Pythagore donne la longueur d'un vecteur quelconque $\mathbf{u}(u^1, u^2, u^3)$, appelée *norme euclidienne* de ce vecteur :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| &= \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2} \\ &= \sqrt{\delta_{ij} u^i u^j} \end{aligned}$$

Nous retrouvons l'expression analytique (37) p. 91 du produit scalaire euclidien dans une base orthonormée. Dans l'espace euclidien en coordonnées quelconques :

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{g_{ij} u^i u^j}$$

On pose alors la définition suivante :

Définition 11.6.1. *Norme euclidienne d'un vecteur*
Le carré de la norme euclidienne est le produit scalaire euclidien du vecteur avec lui-même :

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$$
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}^2}$$

11.7 Définition d'une norme

On définit une norme par ses propriétés.

Définition 11.7.1. *Norme*
Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels $\mathbb{R}$. L'application :

$$\begin{aligned} \phi \ : \ E &\to \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{u} &\mapsto \phi(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

est une norme si elle satisfait aux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \textit{Séparation :} \quad & \forall \mathbf{u} \in E, \quad \phi(\mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \textit{Homogénéité :} \quad & \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall \mathbf{u} \in E, \quad \phi(\alpha \odot \mathbf{u}) = |\alpha| \times \phi(\mathbf{u}) \\ \textit{Inégalité triangulaire :} \quad & \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2, \quad \phi(\mathbf{u}) + \phi(\mathbf{v}) \geqslant \phi(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Remarquons que la définition de la norme ne nécessite pas l'existence d'un produit scalaire. À partir de l'inégalité triangulaire et de l'homogénéité, nous tirons la propriété de *non-négativité* :

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{u}) + \| - \mathbf{u}\| &\geqslant \phi(\mathbf{u} \oplus (-\mathbf{u})) \\ \phi(\mathbf{u}) + |-1|\phi(\mathbf{u}) &\geqslant \phi(\mathbf{0}) \\ \phi(\mathbf{u}) + \phi(\mathbf{u}) &\geqslant 0 \\ \phi(\mathbf{u}) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

La norme est donc toujours positive ou nulle. On vérifie que la norme euclidienne $\|\cdot\|$ est bien une norme :

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\| &= 0 \\
\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2} &= 0 \\
u^1 = u^2 = u^3 &= 0 \\
\mathbf{u} &= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\alpha \odot \mathbf{u}\| &= \sqrt{(\alpha u^1)^2 + (\alpha u^2)^2 + (\alpha u^3)^2} \\
&= |\alpha|\|\mathbf{u}\|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})^2 \\
&= \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\
&\leqslant \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \\
&\leqslant (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2
\end{aligned}
$$

Définition 11.7.2. *Vecteur normé*
On appelle vecteur normé ou vecteur unitaire, un vecteur de norme unité. En divisant un vecteur quelconque **u** *par sa norme, on obtient un vecteur normé :*

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e} &= \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \\
\|\boldsymbol{e}\| &= 1
\end{aligned}
$$

11.7.1 Pseudo-norme

Dans un espace vectoriel pseudo-euclidien, le produit scalaire est indéfini, le carré de la norme de tout vecteur peut être positif, négatif ou nul, comme c'est le cas dans l'espace-temps pseudo-euclidien de la relativité restreinte. Nous parlerons alors de *pseudo-norme*. En coordonnées galiléennes réduites (9) p. 24 dans l'espace de Minkoswski, la *pseudo-norme* d'un vecteur quelconque $\mathbf{u}(u^0, u^1, u^2, u^3)$ est définie par :

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\varepsilon\,[(u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2]}$$

où ε est la fonction indicatrice qui vaut ± 1, de sorte que le terme sous le radical soit positif. Cette définition nous assure que $\|\mathbf{u}\| \geqslant \mathbf{0}$, mais il est possible d'avoir $\|\mathbf{u}\| = \mathbf{0}$ pour $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Un tel vecteur s'appelle un vecteur nul (ne pas confondre avec le vecteur zéro $\mathbf{0}(0, 0, 0)$).

12

Tenseur métrique

12.1 Définition

L'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs, relation (36) p. 91, fait apparaitre le produit scalaire de tous les vecteurs de base pris deux à deux, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$. Nous pouvons former une matrice carrée à partir de ces produits scalaires.

Définition 12.1.1. *Tenseur métrique*
La matrice $[g_{ij}]$ *définie par ses composantes* g_{ij} *telles que*

$$\forall i, j \quad g_{ij} \triangleq \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$$

est appelée tenseur métrique ou tenseur fondamental, noté G*.*

On retrouve les propriétés du produit scalaire. On ajoute le fait que les composantes du tenseur métrique sont fonction des coordonnées lorsqu'elles ne sont pas rectilignes puisque les vecteurs de base varient d'un point à l'autre (donc dans les espaces pré-euclidiens en coordonnées curvilignes, et dans les espaces ayant une courbure intrinsèque).

Exemple 12.1.1. *Dans la base naturelle, le tenseur métrique de l'espace euclidien a pour composantes en coordonnées cylindriques (en utilisant* (6) *p. 23) :*

$$G\begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\rho & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{38}$$

et en coordonnées sphériques (en utilisant (8) *p. 23) :*

$$G\begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \tag{39}$$

Exemple 12.1.2. *À la surface d'une sphère de rayon* r*, plaçons nous dans la base naturelle* $(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ *associée aux coordonnées sphériques* (θ, ϕ)*, où* θ *est la colatitude et* ϕ *la* *longitude (voir la figure 7.4 p. 64). Le tenseur métrique a pour composantes*

$$G\begin{bmatrix}\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_\phi\\ \mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{e}_\phi\end{bmatrix}=G\begin{bmatrix}r^2 & 0\\ 0 & r^2\sin^2(\theta)\end{bmatrix}$$

où r est constant.

Au paragraphe 20.8 p. 204 nous montrons que la matrice G se transforme de façon à rendre invariante la distance entre deux points par changement de coordonnées, donc par changement de base. Les matrices qui se transforment de la sorte portent le nom de tenseur. Toutes les matrices ne sont pas des tenseurs, tous les tenseurs à deux indices peuvent être représentés sous forme de matrices. Nous verrons que la représentation matricielle des tenseurs à des limites que n'a pas la notation indicielle.

Exemple 12.1.3. *Soit $(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)$ une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien E_2 (le plan euclidien aussi noté $\mathbb{R}^2$). Le tenseur métrique a pour composantes :*

$$G\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y\\ \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_y\end{bmatrix}=G\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Exemple 12.1.4. *Soit $(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)$ la base d'un système de coordonnées cartésiennes de l'espace vectoriel euclidien E_2, telle que $\|\boldsymbol{e}_x\|=a$ et $\|\boldsymbol{e}_y\|=b$. Le tenseur métrique a pour composantes :*

$$G\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y\\ \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_y\end{bmatrix}=G\begin{bmatrix}a^2 & ab\cos(\theta)\\ ab\cos(\theta) & b^2\end{bmatrix}$$

La symétrie du produit scalaire implique la symétrie des g_{ij} quelle que soit la base :

$$\forall i,j\quad \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_i$$

$$\boxed{\forall i,j\quad g_{ij}=g_{ji}}\tag{40}$$

Grâce au tenseur métrique le produit scalaire s'écrit :

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=g_{ij}u^iv^j\tag{41}$$

En utilisant la non dégénérescence du produit scalaire :

$$\begin{aligned}&\text{Si } \forall\mathbf{v},\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0,\ \text{alors } \mathbf{u}=\mathbf{0}\\ \Leftrightarrow\quad &\text{Si } \forall v^j,\quad g_{ij}u^iv^j=0,\ \text{alors } u^i=0\\ \Rightarrow\quad &\text{Si } \forall j,\quad g_{ij}u^i=0,\ \text{alors } u^i=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad \text{Si}\quad \begin{cases}g_{11}u^1+g_{21}u^2+\cdots+g_{n1}u^n=0\\ g_{12}u^1+g_{22}u^2+\cdots+g_{n2}u^n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ g_{1n}u^1+g_{n2}u^2+\cdots+g_{nn}u^n=0\end{cases}\quad \text{alors } u^1=u^2=\cdots=u^n=0$$

$$\Rightarrow \quad \text{Si} \quad \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1} \\ g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{1n} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $g_{ij}u^iv^j$ soit non dégénérée est que le déterminant de la matrice carrée G soit non nul :

$$g \neq 0 \tag{42}$$

12.2 Tenseur métrique et composantes

En utilisant les définitions 11.4.1 p. 92 et 3.2.9 p. 28 :

$$\begin{aligned} \forall j \quad u_j &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_j \\ &= \sum_i \left(u^i \mathbf{e}_i\right) \cdot \mathbf{e}_j \\ &= \sum_i u^i \left(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j\right) \\ &= \sum_i g_{ij} u^i \end{aligned}$$

Les g_{ij} permettent de passer des composantes contravariantes aux composantes covariantes, autrement dit d'abaisser les indices :

$$\boxed{\forall j \quad u_j = g_{ij} u^i} \tag{43}$$

Ces relations sont des relations entre composantes. Si i et j varient de 1 à 3, l'écriture indicielle condense trois relations, comme le ferait une écriture vectorielle.

Exemple 12.2.1. *Soit* $\mathbf{u}$ *un vecteur d'un espace vectoriel euclidien* E_2*. Pour la première composante covariante,*

$$\begin{aligned} u_1 &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1 \\ &= \left(u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2\right) \cdot \mathbf{e}_1 \\ &= u^1 \left(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1\right) + u^2 \left(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1\right) \\ &= g_{11}\, u^1 + g_{21}\, u^2 \end{aligned}$$

et pour la seconde composante covariante :

$$\begin{aligned} u_2 &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= (u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= u^1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + u^2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) \\ &= g_{12}\, u^1 + g_{22}\, u^2 \end{aligned}$$

En écriture matricielle nous avons le système :

$$\begin{cases} g_{11}\, u^1 + g_{21}\, u^2 = u_1 \\ g_{12}\, u^1 + g_{22}\, u^2 = u_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{44}$$

12.3 Représentations du produit scalaire

Avec le tenseur métrique le produit scalaire de deux vecteurs (36) p. 91 s'écrit (relation (41) p. 98) :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{ij} u^i v^j$$

Notation 13. *On trouve aussi la notation*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \triangleq g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

qui montre explicitement que le tenseur métrique prend en entrée deux vecteurs et donne en sortie un scalaire.

En utilisant les relations (43) p. 99 :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_j v^j \tag{45}$$

Le tenseur métrique n'apparait plus dans l'expression du produit scalaire et tous les termes sont précédés d'un signe positif,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v^1 + u_2 v^2 + \dots u_n v^n$$

mais chaque terme est algébrique, c'est-à-dire positif, négatif ou nul.

Exemple 12.3.1. *Dans l'espace vectoriel euclidien E_2, montrons que le vecteur $\mathbf{u}$ de composantes contravariantes $(3/5, 4/(5\rho))$ est normé. Les composantes sont données dans la base naturelle polaire locale $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$, c'est-à-dire la base présente en tout point du plan mais différente en chaque point (on devrait parler des bases naturelles polaires au pluriel) :*

$$\mathbf{u} = \frac{3}{5}\,\mathbf{e}_\rho + \frac{4}{5\rho}\,\mathbf{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5\rho \end{pmatrix}$$

Montrons également que $\mathbf{u}$ est orthogonal au vecteur normé $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \frac{-4}{5}\,\mathbf{e}_\rho + \frac{3}{5\rho}\,\mathbf{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}\begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5\rho \end{pmatrix}$$

Avec la relation (15) p. 47 :

$$\|\mathbf{u}\|^2 = g_{ij} u^i u^j = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5\rho \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4\rho/5 \end{pmatrix} = \frac{9}{25} + \frac{16\rho}{25\rho} = 1$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = g_{ij} v^i v^j = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5\rho \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3\rho/5 \end{pmatrix} = \frac{16}{25} + \frac{9\rho}{25\rho} = 1$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{ij} u^i v^j = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5\rho \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3\rho/5 \end{pmatrix} = -\frac{12}{25} + \frac{12\rho}{25\rho} = 0$$

12.4 Notation matricielle des covecteurs

Nous pouvons écrire le produit scalaire sous forme de multiplication matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = u_1 v^1 + u_2 v^2 + \dots + u_n v^n$$

et donc représenter les covecteurs par des matrices lignes. La symétrie du produit scalaire devient :

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

En revanche l'écriture matricielle de l'égalité 44 p. 99 n'est plus possible car on aurait

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \tag{46}$$

qui ne respecte pas la notation que l'on a choisi pour la multiplication matricielle. Au paragraphe 14 p. 123 nous changeons de notation matricielle pour le tenseur métrique.

Remarque 24. *Un covecteur n'est pas la transposée d'un vecteur car leurs composantes ne se transforment pas de la même façon par changement de base :*

$$(u_1 \quad u_2) \neq (u^1 \quad u^2)$$

12.5 Tenseur métrique dual

Cherchons l'expression des composantes contravariantes d'un vecteur en fonction de ses composantes covariantes. Nous devons résoudre (inverser) le système des n équations linéaires à n inconnues u^j des relations (43) p. 99 :

$$\forall i \quad g_{ij} u^j = u_i$$

D'après (42) p. 99 le déterminant g de la matrice G est différent de zéro, par suite le système admet une solution unique. La méthode de résolution de Cramer donne alors :

$$\forall j \quad u^j = \sum_i \frac{\mathrm{C}_{ij}(G)}{g} u_i$$

En posant,

$$\forall i, j \quad g^{ji} \triangleq \frac{\mathrm{C}_{ij}(G)}{g} \tag{47}$$

nous obtenons les relations cherchées :

$$\boxed{\forall j \quad u^j = g^{ji} u_i} \tag{48}$$

où les g^{ij} sont les éléments de la matrice inverse de la matrice G, appelé tenseur dual ou tenseur conjugué du tenseur métrique. Il permet de passer des composantes covariantes aux composantes contravariantes, autrement dit d'élever les indices. La notation avec deux indices supérieurs sera justifiée au paragraphe 20.8 p. 204.

G étant symétrique, il en est de même de $[g^{ij}]$. De plus les déterminants de matrices inverses sont inverses l'un de l'autre :

$$GG^{-1} = I \tag{49}$$

$$\det\left(GG^{-1}\right) = \det I$$

$$\det G \times \det G^{-1} = 1$$

$$\det[g^{ji}] = \frac{1}{g} \tag{50}$$

Les relations (43) p. 99 et (48) p. 101 nous donnent :

$$\begin{aligned} \forall k \quad & u_k = g_{kj}u^j \\ \forall i \quad & g^{ik}u_k = g^{ik}g_{kj}u^j \\ \forall i \quad & u^i = g^{ik}g_{kj}u^j \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j} \tag{51}$$

qui exprime en notation indicielle que les matrices sont inverses l'une de l'autre. En particulier pour un espace à n dimensions :

$$\sum_{i=1}^{n} g^{ik}g_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \delta^i_i$$

Avec la convention de sommation sur les indices répétés en haut et en bas :

$$\begin{aligned} g^{ik}g_{ki} &= \delta^i_i \\ &= \delta^1_1 + \delta^2_2 + \cdots + \delta^n_n \\ &= n \end{aligned} \tag{52}$$

Notez que $\delta_{ii} = 1$ d'après la définition 2.3.1 p. 7.

> EXEMPLE 12.5.1. *Dans la base naturelle polaire le tenseur métrique a pour composantes :*
>
> $$G\begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta \end{bmatrix} = G\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$$
>
> *Les éléments du tenseur métrique sont fonction des coordonnées, par exemple ici $g_{\theta\theta} = \rho^2$. On les appelle des fonctions métriques. Le déterminant du tenseur métrique polaire vaut :*
>
> $$\begin{aligned} g &= 1 \times \rho^2 - 0 \times 0 \\ &= \rho^2 \end{aligned}$$
>
> *L'inverse du tenseur métrique dans la base naturelle polaire a pour composantes :*
>
> $$\begin{aligned} \left[g^{ij}\right] &= \frac{1}{\rho^2}\begin{bmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{53}$$

Exemple 12.5.2. *À la surface d'une sphère de rayon r le tenseur métrique a pour composantes :*

$$G\begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Le déterminant du tenseur métrique vaut :

$$g = r^4\sin^2(\theta)$$

L'inverse du tenseur métrique s'écrit :

$$\begin{aligned} \left[g^{ij}\right] &= \frac{1}{r^4\sin^2(\theta)}\begin{bmatrix} r^2\sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/r^2 & 0 \\ 0 & 1/(r^2\sin^2(\theta)) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{54}$$

Exemple 12.5.3. *Le tenseur métrique de Schwarzschild*
La métrique de Schwarzschild s'écrit :

$$ds^2 = e^\alpha c^2 dt^2 - e^\beta dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2(\theta)d\phi$$

où α et β sont des fonctions de r et t. En coordonnées galiléennes réduites, (9) *p.* *24* *:*

$$ds^2 = g_{00}d(x^0)^2 + g_{11}d(x^1)^2 + g_{22}d(x^2)^2 + g_{33}d(x^3)^2$$

avec

$$\begin{cases} g_{00} = e^\alpha \\ g_{11} = -e^\beta \\ g_{22} = -r^2 \\ g_{33} = -r^2\sin^2(\theta) \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad G\begin{bmatrix} e^\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix} \tag{55}$$

Le déterminant de G s'écrit

$$g = -e^\alpha e^\beta r^4\sin^2(\theta) \tag{56}$$

Les composantes du tenseur dual s'écrivent :

$$g^{00} = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} -e^\beta & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2\sin^2(\theta) \end{vmatrix} \quad\Rightarrow\quad g^{00} = \frac{-e^\beta r^4\sin^2(\theta)}{-e^\alpha e^\beta r^4\sin^2(\theta)}$$

$$g^{11} = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} e^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2\sin^2(\theta) \end{vmatrix} \quad\Rightarrow\quad g^{11} = \frac{e^\alpha r^4\sin^2(\theta)}{-e^\alpha e^\beta r^4\sin^2(\theta)}$$

$$g^{22} = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} e^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -e^\beta & 0 \\ 0 & 0 & -r^2\sin^2(\theta) \end{vmatrix} \quad\Rightarrow\quad g^{22} = \frac{e^\alpha e^\beta r^2\sin^2(\theta)}{-e^\alpha e^\beta r^4\sin^2(\theta)}$$

$$g^{33} = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} e^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -e^\beta & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{vmatrix} \quad\Rightarrow\quad g^{33} = \frac{e^\alpha e^\beta r^2}{-e^\alpha e^\beta r^4\sin^2(\theta)}$$

$$\begin{cases} g^{00} = e^{-\alpha} \\ g^{11} = -e^{-\beta} \\ g^{22} = -\dfrac{1}{r^2} \\ g^{33} = -\dfrac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[g^{ij}\right] = \begin{bmatrix} e^{-\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{bmatrix}$$

12.6 Différentielle du déterminant du tenseur métrique

La relation (14) p. 41 donne la différentielle du déterminant du tenseur métrique :

$$dg = \sum_i \sum_j dg_{ij} \; \mathrm{C}_{ij}(G)$$

La relation (47) p. 101 donne l'expression du cofacteur :

$$dg = gg^{ij} dg_{ij} \tag{57}$$

$$\partial_k g dx^k = gg^{ij} \partial_k g_{ij} dx^k$$

$$\partial_k g = gg^{ij} \partial_k g_{ij} \tag{58}$$

Remarque 25. *Ce dernier résultat s'obtient également par :*

$$g = \sum_i g_{ij} \; \mathrm{C}_{ij}(G)$$

$$\begin{aligned} \forall k \quad \partial_k g &= \sum_i \partial_k [g_{ij} \, \mathrm{C}_{ij}(G)] \\ &= \sum_i \left\{ \frac{\partial [g_{ij} \, \mathrm{C}_{ij}(G)]}{\partial g_{ij}} \, \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right\} \end{aligned}$$

Le $\mathrm{C}_{ij}(G)$ ne contenant pas explicitement g_{ij} :

$$\forall k \quad \partial_k g = \sum_j [\mathrm{C}_{ij}(G) \, \partial_k g_{ij}]$$

Avec (52) p. 102 :

$$\begin{aligned} \forall k \quad \partial_k g &= \sum_i [\mathrm{C}_{ij}(G) \, g_{ij} g^{ij} \, \partial_k g_{ij}] \\ &= g \sum_i \left(g^{ij} \partial_k g_{ij}\right) \\ &= gg^{ij} g_{ij,k} \end{aligned}$$

12.7 Tenseur métrique et norme

La définition du carré de la norme d'un vecteur 11.6.1 p. 94

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$$

peut s'écrire grâce au tenseur métrique.

DÉFINITION 12.7.1. *Norme d'un vecteur*
Le carré de la norme d'un vecteur a pour expression

$$\|\mathbf{u}\|^2 = g_{ij}u^i u^j$$

Nous avons également :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|^2 &= g^{ij}u_i u_j \\ &= u_i u^i\end{aligned}$$

12.8 Tenseur métrique et bases

12.8.1 Base orthonormée

DÉFINITION 12.8.1. *Base orthogonale*
Une base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ *d'un espace vectoriel euclidien* E_n *est orthogonale ssi ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux :*

$$\forall i \neq j,\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$$
$$\forall i \neq j,\ g_{ij} = 0 \tag{59}$$

G est donc diagonale. L'inverse d'une matrice diagonale étant diagonale :

$$\forall i \neq k,\ g^{ik} = 0$$

Les relations (51) p. 102 pour $i = j$ deviennent :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad g_{ik}g^{ki} = 1 \quad \text{sans sommer sur } i$$

Les termes non diagonaux étant nuls, $i = k$:

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad g_{ii}g^{ii} = 1 \quad \text{sans sommer sur } i$$

soit, dans toute base orthogonale :

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}}\ ,\ g_{22} = \frac{1}{g^{22}}\ ,\ \ldots\ ,\ g_{nn} = \frac{1}{g^{nn}} \tag{60}$$

DÉFINITION 12.8.2. *Base orthonormée*
$(\mathbf{e}_i)$ *est une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien ssi ses vecteurs sont normés et orthogonaux deux à deux :*

$$\forall i, j \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$
$$\forall i, j \quad g_{ij} = \delta_{ij}$$

Dans toute base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien, les composantes covariantes et contravariantes sont confondues. En effet, en partant des relations (43) p. 99 et avec la définition 12.8.2 ci-dessus :

$$\begin{aligned}\forall i \quad u_i &= g_{ij}u^j \\ &= \delta_{ij}u^j \\ &= u^i\end{aligned}$$

Il est souvent avantageux de se placer dans une base orthonormée.

Théorème 12.8.1. *Théorème de Gram-Schmidt*
Tout espace vectoriel pré-euclidien admet des bases orthonormées.

La démonstration est donnée en annexe 27.2 p. 373.

Exemple 12.8.1. *Dans l'espace de la physique classique non relativiste, plaçons nous dans la base orthonormée $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$. Le tenseur métrique a pour composantes :*

$$G \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 12.8.2. *Plaçons-nous dans l'une des deux bases canoniques $(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, c'est-à-dire les plus simples, de l'espace-temps de la relativité restreinte :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_0(1,0,0,0) \\ \boldsymbol{e}_1(0,i,0,0) \\ \boldsymbol{e}_2(0,0,i,0) \\ \boldsymbol{e}_3(0,0,0,i) \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} \boldsymbol{e}_0(i,0,0,0) \\ \boldsymbol{e}_1(0,1,0,0) \\ \boldsymbol{e}_2(0,0,1,0) \\ \boldsymbol{e}_3(0,0,0,1) \end{cases}$$

où i est le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$. Dans la première base canonique (convention de genre temps), le tenseur métrique a pour composantes :

$$\eta \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} = \eta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L'espace-temps de la relativité restreinte est pseudo-euclidien (en coordonnées rectangulaires son tenseur métrique est diagonal et ses composantes valent ± 1). Sa base canonique est pseudo-orthonormale. Calculons l'inverse du tenseur métrique :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{61}$$

Le tenseur métrique de l'espace-temps de la relativité restreinte est égal à son inverse.

12.8.2 Base orthogonale non normée

Dans une base orthogonale non normée, les composantes covariantes et contravariantes ne sont pas confondues. Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ une base orthogonale d'un espace vectoriel euclidien E_2, telle que $\|\mathbf{e}_1\| = 2$ et $\|\mathbf{e}_2\| = 1$ (Fig. 12.1).

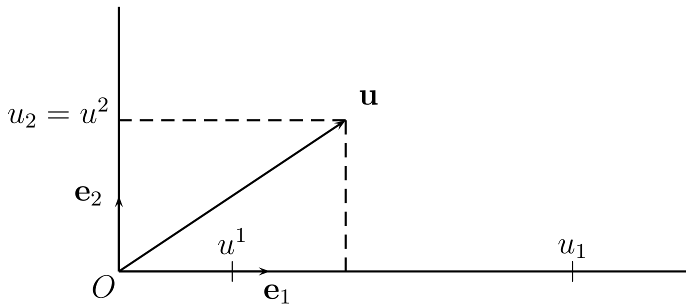


Fig. 12.1 – Base orthogonale non normée

Pour avoir,

$$\mathbf{u} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2$$

la composante contravariante u^1 est divisée par 2 pour compenser la multiplication par 2 de la norme du vecteur de base $\mathbf{e}_1$. Elle varie contrairement (contra-variante) à la norme de son vecteur de base $\mathbf{e}_1$.

La composante covariante u_1, telle que

$$u_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1$$

est multipliée par 2 en même temps que le vecteur de base $\mathbf{e}_1$. Elle varie comme (co-variante) la norme de son vecteur de base $\mathbf{e}_1$.

Bien que la base soit orthogonale nous avons quand même $\mathbf{u} \neq u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$, car lors d'un changement de base la composante covariante u_1 et le vecteur de base $\mathbf{e}_1$ sont multipliés dans le même rapport, ne laissant pas invariant $u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$. En utilisant les relations (43) p. 99 nous avons :

$$\begin{aligned} u_1 &= g_{11}u^1 \\ &= (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1)\, u^1 \\ &= \|\mathbf{e}_1\|^2 u^1 \\ &= 4u^1 \end{aligned}$$

La composante $g_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1$, et de façon générale toutes les composantes g_{ij}, est covariante au carré puisqu'elle varie comme $\|\mathbf{e}_1\|^2$. Nous la dirons deux fois covariante.

> Remarque 26. *Par abus de langage nous dirons que le tenseur est deux fois covariant alors que ce sont ses composantes qui le sont.*

La double covariance du tenseur métrique permet l'indépendance du produit scalaire par changement de base, relation (36) p. 91.

Pour la seconde composante :

$$\begin{aligned} u_2 &= g_{22}u^2 \\ &= (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2)\, u^2 \\ &= \|\mathbf{e}_2\|^2 u^2 \\ &= u^2 \end{aligned}$$

Le tenseur métrique s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12.8.3 Base oblique normée

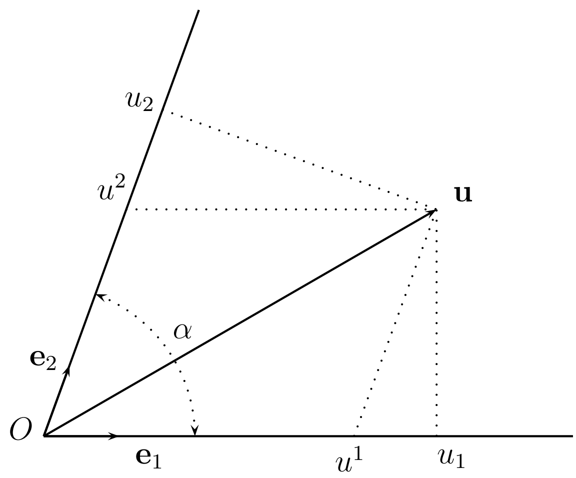


FIG. 12.2 – Base oblique normée

Le tenseur métrique s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & 1 \end{bmatrix}$$

Son déterminant vaut

$$\begin{aligned} g &= 1 - \cos^2 \alpha \\ &= \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

et son inverse s'écrit :

$$\left[g^{ij}\right] = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \begin{bmatrix} 1 & -\cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & 1 \end{bmatrix} \tag{62}$$

12.8.4 Base oblique non normée

Exemple 12.8.3. *Soit* $\{\boldsymbol{e}_1(2,0), \boldsymbol{e}_2(-1,3)\}$ *une base de l'espace vectoriel* E_2. *Le tenseur métrique s'écrit :*

$$\begin{cases} g_{11} = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 \\ g_{12} = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \\ g_{21} = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 \\ g_{22} = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{11} = 4 \\ g_{12} = -2 \\ g_{21} = -2 \\ g_{22} = 10 \end{cases} \Rightarrow G \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

Cette base est oblique et non normée. Déterminons les composantes de son inverse $[g^{ij}]$. *L'inverse d'une matrice vaut un sur le déterminant fois la transposée de la comatrice :*

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \left[\mathrm{com}(M)\right]^T$$

Or :

$$\begin{aligned} g &= 4 \times 10 - (-2) \times (-2) \\ &= 36 \end{aligned}$$

La comatrice de toute matrice symétrique est symétrique. Ici elle a pour composantes :

$$\mathrm{com}\, G \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Toute matrice symétrique étant égale à sa transposée $(\mathrm{com}\, G)^T = \mathrm{com}\, G$, *et :*

$$[g^{ij}] = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Déterminons l'inverse du tenseur métrique grâce aux relations (51) *p.* *102* *:*

$$\begin{cases} g_{11}g^{11} + g_{12}g^{21} = \delta^1{}_1 \\ g_{11}g^{12} + g_{12}g^{22} = \delta^2{}_1 \\ g_{21}g^{11} + g_{22}g^{21} = \delta^1{}_2 \\ g_{21}g^{12} + g_{22}g^{22} = \delta^2{}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4g^{11} - 2g^{21} = 1 \\ 4g^{12} - 2g^{22} = 0 \\ -2g^{11} + 10g^{21} = 0 \\ -2g^{12} + 10g^{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g^{11} = 5/18 \\ g^{12} = 1/18 \\ g^{21} = 1/18 \\ g^{22} = 1/9 \end{cases}$$

13

Formes linéaires

13.1 Formes linéaires

Nous donnons une définition alternative à la définition 5.0.7 p. 44 d'une forme linéaire.

Définition 13.1.1. *Forme linéaire*
Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels $\mathbb{R}$. Une forme linéaire est une application qui à un vecteur $\mathbf{v}$ de E associe, ou fait correspondre, un scalaire α de son propre corps $\mathbb{R}$ et qui est linéaire :

$$\begin{aligned} \tilde{x} :& E \to \mathbb{R} \\ & \mathbf{v} \mapsto \tilde{x}(\mathbf{v}) = \alpha \end{aligned}$$

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E \times E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \tilde{x}(\lambda \odot \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \lambda \tilde{x}(\mathbf{u}) + \tilde{x}(\mathbf{v})$$

L'équivalence entre les deux définitions est démontrée un peu plus loin, théorème 13.1.2 p. 113.

Exemple 13.1.1. *Produit scalaire avec un vecteur donné*
Soit $\mathbf{v}$ un vecteur donné d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{R}$. Le produit scalaire avec le vecteur $\mathbf{v}$, noté f_v, prend en entrée un vecteur $\mathbf{x}$ de E et donne en sortie un scalaire de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_v(\mathbf{x}) &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \\ &= v^i x_i \end{aligned}$$

De plus, le produit scalaire possède les propriétés de linéarité de la définition 13.1.1 p. 111 d'une forme linéaire :

(1) Additivité :

$$\begin{aligned} f_v(\mathbf{x}) + f_v(\mathbf{y}) &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{y} \\ &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= f_v(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \end{aligned}$$

(2) Homogénéité :

$$\begin{aligned}\alpha f_v(\mathbf{x}) &= \alpha(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x})\\ &= \mathbf{v}\cdot(\alpha\mathbf{x})\\ &= f_v(\alpha\mathbf{x})\end{aligned}$$

Par conséquent, f_v est une forme linéaire. Reprenons le produit scalaire (45) p. 100 :

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_i v^i$$

Nous pouvons l'écrire

$$\tilde{u}(\mathbf{v}) = u_i v^i$$

où $\tilde{u}$ prend en entrée un vecteur et donne en sortie un scalaire. Notons que par symétrie du produit scalaire :

$$\tilde{u}(\mathbf{v}) = \tilde{v}(\mathbf{u})$$

Exemple 13.1.2. *Soit $E = \mathbb{R}^2$ un espace vectoriel de dimension 2, et soit $\mathbf{v}$ un vecteur de E de composantes (v^1, v^2). L'application,*

$$\begin{aligned}\tilde{x} &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\\ \mathbf{v}(v^1, v^2) &\mapsto \tilde{x}(\mathbf{v}) = 2v^1 + 3v^2\end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$. En effet, $\tilde{x}$ prend en entrée un vecteur et donne en sortie un scalaire (sous la forme d'un polynôme homogène de degré un des variables v^1 et v^2). Nous pouvons vérifier les deux conditions de linéarité :

(1) Additivité : soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E^3$ tels que $\mathbf{w} = \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$,

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\mathbf{u}\oplus\mathbf{v}) &= \tilde{x}(\mathbf{w})\\ &= 2w^1 + 3w^2\\ &= 2(u^1 + v^1) + 3(u^2 + v^2)\\ &= 2u^1 + 3u^2 + 2v^1 + 3v^2\\ &= \tilde{x}(\mathbf{u}) + \tilde{x}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

(2) Homogénéité : Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^2$ tels que $\mathbf{u} = \lambda \odot \mathbf{v}$,

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\lambda\odot\mathbf{v}) &= \tilde{x}(\mathbf{u})\\ &= 2u^1 + 3u^2\\ &= 2(\lambda v^1) + 3(\lambda v^2)\\ &= \lambda(2v^1 + 3v^2)\\ &= \lambda\tilde{x}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

Exemple 13.1.3. *Soit $E = \mathbb{R}^n$ un espace vectoriel de dimension n, et soit $\mathbf{v}$ un vecteur de E de composantes $(v^1, v^2, \ldots, v^n)$. L'application qui à un vecteur associe le carré de*

> *sa norme est une forme quadratique (voir la définition 12.7.1 p. 105) :*
> $$\begin{aligned}\tilde{x} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ \mathbf{v}(v^1, v^2, \ldots, v^n) &\mapsto \tilde{x}(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|^2 = g_{ij}v^iv^j\end{aligned}$$
> *Elle n'est pas linéaire (puisque quadratique). En effet, soient* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^2$ *:*
> $$\begin{aligned}\tilde{x} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ \tilde{x}(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}\|^2\\ &\neq \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\\ &\neq \tilde{x}(\mathbf{u}) + \tilde{x}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

Montrons l'équivalence avec la définition 5.0.7 p. 44 d'une forme linéaire.

THÉORÈME 13.1.1. *Tout polynôme homogène de degré un des n variables* $v^1, v^2, \ldots, v^n$ *est une application linéaire qui au vecteur* $\mathbf{v}(v^1, v^2, \ldots, v^n)$ *de l'espace vectoriel E sur le corps des réels fait correspondre un réel.*

DÉMONSTRATION. C'est la généralisation à $\mathbb{R}^n$ de l'exemple 13.1.2 p. 112 :

$$\begin{aligned}\tilde{x} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ \forall a_i \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v}(v^1, v^2, \ldots, v^n) &\mapsto \tilde{x}(\mathbf{v}) = a_1v^1 + a_2v^2 + \cdots + a_nv^n\\ \tilde{x}(\lambda \odot \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) &= a_1(\lambda u^1 + v^1) + a_2(\lambda u^2 + v^2) + \cdots + a_n(\lambda u^n + v^n)\\ &= \lambda a_1u^1 + a_1v^1 + \lambda a_2u^2 + a_2v^2 + \cdots + \lambda a_nu^n + a_nv^n\\ &= \lambda\tilde{x}(\mathbf{u}) + \tilde{x}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

□

Réciproquement :

THÉORÈME 13.1.2. *Toute forme linéaire de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *peut s'écrire comme un polynôme homogène de degré un par rapport à n variables* $v^1, v^2, \ldots, v^n$ *:*

$$\begin{aligned}\tilde{x} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ \mathbf{v}(v^1, v^2, \ldots, v^n) &\mapsto \tilde{x}(\mathbf{v}) = a_1v^1 + a_2v^2 + \cdots + a_nv^n\end{aligned}$$

où $\forall i \ a_i \in \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. Dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$, soit $\mathbf{v}$ le vecteur de composantes $(v^1, v^2, \ldots, v^n)$. En utilisant l'additivité puis l'homogénéité,

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\mathbf{v}) &= \tilde{x}(v^1\mathbf{e}_1 \oplus v^2\mathbf{e}_2 \oplus \cdots \oplus v^n\mathbf{e}_n)\\ &= \tilde{x}(v^1\mathbf{e}_1) + \tilde{x}(v^2\mathbf{e}_2) + \cdots + \tilde{x}(v^n\mathbf{e}_n)\\ &= v^1\tilde{x}(\mathbf{e}_1) + v^2\tilde{x}(\mathbf{e}_2) + \cdots + v^n\tilde{x}(\mathbf{e}_n)\\ &= a_1v^1 + a_2v^2 + \cdots + a_nv^n\\ &= a_iv^i\end{aligned}$$

où $\forall i \ a_i \in \mathbb{R}, \ a_i = \tilde{x}(\mathbf{e}_i)$. □

13.2 Expression analytique d'une forme linéaire

Dans la base $(\mathbf{e}_i)$ de l'espace vectoriel E, soit $\mathbf{u}$ un vecteur :

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\mathbf{u}) &= \tilde{x}(u^i\mathbf{e}_i)\\ &= u^i\tilde{x}(\mathbf{e}_i)\\ &= u^i a_i\end{aligned}$$

où

$$\forall i\ a_i \in \mathbb{R}, \quad a_i = \tilde{x}(\mathbf{e}_i)$$

La forme linéaire $\tilde{x}(\mathbf{u})$ est donc parfaitement déterminée par les n scalaires a_i, sa décomposition étant unique. Ainsi on peut déterminer une forme linéaire par correspondance des vecteurs de base avec des scalaires déterminés.

13.3 Espace vectoriel dual

Considérons l'ensemble des formes linéaires définies sur E. Pour en faire un espace vectoriel adoptons pour cet ensemble les deux lois de composition :

(1) Addition vectorielle

La somme de deux formes linéaires est une forme linéaire :

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\mathbf{u}) + \tilde{y}(\mathbf{u}) &= u^i a_i + u^i b_i\\ &= \sum_i u^i(a_i + b_i)\\ &= u^i c_i\\ &= \tilde{z}(\mathbf{u})\end{aligned}$$

(2) Multiplication par un scalaire

La multiplication par un scalaire d'une forme linéaire est une forme linéaire :

$$\begin{aligned}\alpha\tilde{x}(\mathbf{u}) &= \alpha(u^i a_i)\\ &= (\alpha a_i)u^i\\ &= b_i u^i\\ &= \tilde{y}(\mathbf{u})\end{aligned}$$

Ces deux lois de composition vérifient les propriétés énoncées au paragraphe 3.2.3 p. 24. Par conséquent, l'ensemble des formes linéaires munies de ces deux lois forment un espace vectoriel appelé *dual*[1] de E et noté E^*, dont les formes linéaires de E en sont les vecteurs.

1. dual signifie « deux »

13.4 Base duale

Soit $\mathbf{u}$ un vecteur d'un espace vectoriel E, et soit la forme linéaire $\tilde{e}^i$ telle que :

$$\forall i \quad \tilde{e}^i(\mathbf{u}) = u^i$$

Cette forme linéaire est particulière puisqu'elle donne en sortie la $i^{ème}$ composante contravariante du vecteur qu'elle prend en entrée. Alors :

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\mathbf{u}) &= a_i u^i \\ &= a_i \tilde{e}^i(\mathbf{u}) \\ \tilde{x} &= a_i \tilde{e}^i \end{aligned}$$

Le système des n formes linéaires $\tilde{e}^i$ constitue donc une base de l'espace vectoriel dual E^*. Les a_i sont les *composantes* de la forme linéaire $\tilde{x}$. De plus

$$\begin{aligned} &\forall j \quad \tilde{e}^j(\mathbf{u}) = \tilde{e}^j(u^i \mathbf{e}_i) \\ &\forall j \quad u^j = u^i \tilde{e}^j(\mathbf{e}_i) \end{aligned}$$

donc :

$$\forall i, j \quad \tilde{e}^j(\mathbf{e}_i) = \delta_i^j$$

Définition 13.4.1. *Base duale*
La base $(\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \dots, \tilde{e}^n)$ *de* E^* *telle que*

$$\forall i, j \quad \tilde{e}^j(\mathbf{e}_i) \triangleq \delta_i^j$$

est appelée base duale de la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ *de* E.

13.5 Base réciproque

Définition 13.5.1. *Base réciproque*
La base $(\boldsymbol{\epsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}_n)$ *de l'espace vectoriel* E_n*, telle que*

$$\forall i, j \quad \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j \triangleq \delta_{ij} \tag{63}$$

est appelée base réciproque de la base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ *de* E_n.

Si la base $(\mathbf{e}_i)$ est la base formée par les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées, alors sa base réciproque ϵ_j est la base formée par les vecteurs perpendiculaires aux hypersurfaces de coordonnées. Elles sont confondues si elles sont orthogonales *et* normées car avec $\mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_1 = 1$, si $\mathbf{e}_1 = 2$ alors $\epsilon_1 = 1/2$.

Cette définition est proche de la définition 13.4.1 ci-dessus de la base duale. Cependant on reste dans l'espace E et on utilise un produit scalaire. Dans les espaces définis sans produit scalaire, donc sans métrique, la base réciproque s'appelle base duale, et les covecteurs s'appellent des formes linéaires ou *vecteurs duaux*.

Soit B la matrice de passage de la base réciproque vers la base d'origine (la matrice de passage est habituellement définie comme étant la transposée de B, voir la définition 19.2.1 p. 166) :

$$\begin{aligned}
&\forall i \quad \mathbf{e}_i = \sum_j B_{ij}\, \boldsymbol{\epsilon}_j \\
&\forall i,k \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \sum_j B_{ij}\, \boldsymbol{\epsilon}_j \cdot \mathbf{e}_k \\
&\forall i,k \quad g_{ik} = \sum_j B_{ij}\, \delta_{jk} \\
&\forall i,k \quad g_{ik} = B_{ik}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall i \quad \mathbf{e}_i = \sum_j g_{ij}\, \boldsymbol{\epsilon}_j$$

Le tenseur métrique G permet de passer d'une base réciproque à sa base d'origine. Nous voyons que cette relation qui s'appliquait à des composantes, relations (43) p. 99, s'applique ici à des vecteurs. Par analogie, les vecteurs de la base réciproque seront notés avec un indice supérieur, ce qui permettra l'emploi de la convention de sommation. En remplaçant $\boldsymbol{\epsilon}_j$ par $\mathbf{e}^j$, la dernière relation s'écrit

$$\boxed{\forall i \quad \mathbf{e}_i = g_{ij}\, \mathbf{e}^j}$$

et la définition 63 p. 115 devient :

$$\boxed{\forall i,j \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j \triangleq \delta_i^j} \tag{64}$$

Avec les relations (51) p. 102 :

$$\begin{aligned}
&\forall i,j \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j \\
&\forall i,j \quad g_{ik}\, \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^j = g_{ik}\, g^{kj} \\
&\forall k,j \quad \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^j = g^{kj}
\end{aligned}$$

Soit A la matrice de passage de la base d'origine vers la base réciproque :

$$\begin{aligned}
&\forall i \quad \mathbf{e}^i = \sum_j A_{ij}\, \mathbf{e}_j \\
&\forall i,k \quad \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^k = \sum_j A_{ij}\, \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^k \\
&\forall i,k \quad g^{ik} = \sum_j A_{ij}\, \delta_j^k \\
&\forall i,k \quad g^{ik} = A_{ik}
\end{aligned}$$

Le tenseur métrique $[g^{ij}]$ permet de passer d'une base à sa base réciproque :

$$\boxed{\forall i \quad \mathbf{e}^i = g^{ij}\, \mathbf{e}_j} \tag{65}$$

Si la base d'origine n'est pas orthonormée, les vecteurs de la base réciproque ne sont pas de norme unité :

$$\begin{aligned}
\forall i, j \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j &= \delta_i^j \\
\forall i \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^i &= 1 \\
\forall i \quad \|\mathbf{e}_i\| \, \|\mathbf{e}^i\| \cos\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^i\right) &= 1 \\
\forall i \quad \|\mathbf{e}^i\| &= \frac{1}{\|\mathbf{e}_i\| \cos\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^i\right)}
\end{aligned}$$

13.6 Indépendance linéaire des vecteurs réciproques

Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ une base de E_n, pour démontrer que les vecteurs réciproques $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n)$ forment aussi une base de E_n, nous devons montrer qu'ils sont linéairement indépendants :

$$\lambda_j \mathbf{e}^j = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \forall j,\ \lambda_j = 0$$

Posons $\lambda_j \mathbf{e}^j = \mathbf{0}$. Soit $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ un vecteur quelconque de l'espace vectoriel E_n :

$$\begin{aligned}
\lambda_j \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{u} &= \lambda_j \mathbf{e}^j \cdot u^i \mathbf{e}_i \\
\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} &= \lambda_j u^i (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i) \\
0 &= \lambda_j u^i \delta_i^j \\
0 &= \lambda_j u^j
\end{aligned}$$

Cette égalité devant être vérifiée quels que soient les u^j, tous les λ_j sont nuls et les vecteurs $\mathbf{e}^j$ sont linéairement indépendants.

Exemple 13.6.1. *Dans un espace vectoriel euclidien E_2, soit une base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ telle que*

$$\mathbf{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

où les vecteurs de base sont exprimés dans la base rectangulaire $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. Déterminons sa base réciproque $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)$.

(1) En utilisant la définition de la base réciproque (64) *p.* *116**. Posons $\mathbf{e}^1(a, b)$ et $\mathbf{e}^2(c, d)$:*

$$\begin{cases} \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1 \\ \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 2b = 1 \\ 3a + 4b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 - 2b \\ 3 - 2b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = 3/2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}^1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_1 = 1 \\ \mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c + 2d = 0 \\ 3c + 4d = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c = -2d \\ -2d = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 1 \\ d = -1/2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

(2) En se servant de l'inverse du tenseur métrique (65) *p.* *116* *:*

$$G \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad [g^{ij}] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 25 & -11 \\ -11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}^1 = g^{11} \mathbf{e}_1 + g^{12} \mathbf{e}_2 = \frac{25}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{11}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}^2 = g^{21}\mathbf{e}_1 + g^{22}\mathbf{e}_2 = -\frac{11}{4}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{5}{4}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1/2\end{pmatrix}$$

Exemple 13.6.2. *Soit* $\{\mathbf{e}_1(a,0,0), \mathbf{e}_2(0,b,0), \mathbf{e}_3(0,0,c)\}$ *une base de* E_3. *Déterminons sa base réciproque. Soit* $\mathbf{e}^1(x_1,x_2,x_3)$ *:*

$$\begin{cases}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}^1 = 1\\ \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}^1 = 0\\ \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}^1 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(a,0,0)\cdot(x_1,x_2,x_3) = 1\\ (0,b,0)\cdot(x_1,x_2,x_3) = 0\\ (0,0,c)\cdot(x_1,x_2,x_3) = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}ax_1 = 1\\ bx_2 = 0\\ cx_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = 1/a\\ x_2 = 0\\ x_3 = 0\end{cases}$$

Par conséquent $\mathbf{e}^1 = \left(\frac{1}{a},0,0\right)$. *De même on trouve* $\mathbf{e}^2 = \left(0,\frac{1}{b},0\right)$ *et* $\mathbf{e}^3 = \left(0,0,\frac{1}{c}\right)$. *Lorsque la base est orthonormée,* $a=b=c=1$, *elle se confond avec sa base réciproque.*

Exemple 13.6.3. *Soit* $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ *une base normée d'un espace vectoriel, telle que* $(\widehat{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}) = 70°$. *Construisons sa base réciproque.*

(1) En utilisant la définition de la base réciproque (64) *p.* *116* *:*

$$\begin{cases}\mathbf{e}^1\cdot\mathbf{e}_1 = 1\\ \mathbf{e}^1\cdot\mathbf{e}_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \quad \|\mathbf{e}^1\| = \frac{1}{\|\mathbf{e}_1\|\cos(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}^1)} = \frac{1}{\cos 20} \approx 1,064$$

$$\begin{cases}\mathbf{e}^2\cdot\mathbf{e}_1 = 0\\ \mathbf{e}^2\cdot\mathbf{e}_2 = 1\end{cases} \Rightarrow \quad \|\mathbf{e}^2\| = \frac{1}{\|\mathbf{e}_2\|\cos(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}^2)} = \frac{1}{\cos 20} \approx 1,064$$

(2) En se servant du tenseur métrique (65) *p.* *116* *:*

$$G\begin{bmatrix}1 & \cos(70)\\ \cos(70) & 1\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad [g^{ij}] = \frac{-1}{\sin^2(70)}\begin{bmatrix}-1 & \cos(70)\\ \cos(70) & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^1 &= g^{11}\mathbf{e}_1 + g^{12}\mathbf{e}_2\\ &= \frac{\mathbf{e}_1}{\sin^2(70)} - \frac{\cos(70)}{\sin^2(70)}\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^2 &= g^{21}\mathbf{e}_1 + g^{22}\mathbf{e}_2\\ &= -\frac{\cos(70)}{\sin^2(70)}\mathbf{e}_1 + \frac{\mathbf{e}_2}{\sin^2(70)}\end{aligned}$$

En exprimant $\mathbf{e}_1$ *et* $\mathbf{e}_2$ *dans la base rectangulaire* $(\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y)$ *:*

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^1 &= \frac{1}{\sin^2(70)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \frac{\cos(70)}{\sin^2(70)}\begin{pmatrix}\cos(70)\\ \sin(70)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1\\ -\cos(70)/\sin(70)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^2 &= -\frac{\cos(70)}{\sin^2(70)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sin^2(70)}\begin{pmatrix}\cos(70)\\ \sin(70)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0\\1/\sin(70)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

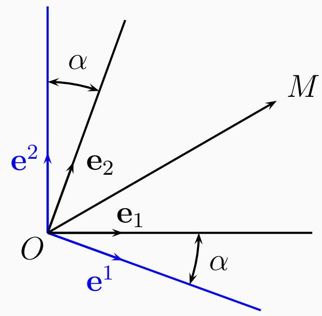


FIG. 13.1 – Bases réciproques

EXEMPLE 13.6.4. *Déterminons la base réciproque de la base polaire naturelle* $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$.

(1) En utilisant la définition de la base réciproque (64) *p. 116 :*

$$\begin{cases}\mathbf{e}^\rho \cdot \mathbf{e}_\rho = 1\\ \mathbf{e}^\rho \cdot \mathbf{e}_\theta = 0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{e}^\rho\| = \frac{1}{\|\mathbf{e}_\rho\|} = 1 \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{e}^\rho = \mathbf{e}_\rho$$

$$\begin{cases}\mathbf{e}^\theta \cdot \mathbf{e}_\rho = 0\\ \mathbf{e}^\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = 1\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{e}^\theta\| = \frac{1}{\|\mathbf{e}_\theta\|} = \frac{1}{\rho} \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{e}^\theta = \frac{\mathbf{e}_\theta}{\rho^2}$$

(2) En se servant de l'inverse du tenseur métrique en coordonnées polaires (53) *p. 102 :*

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/\rho^2\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^\rho &= g^{\rho\rho}\mathbf{e}_\rho + g^{\rho\theta}\mathbf{e}_\theta\\ &= \mathbf{e}_\rho\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^\theta &= g^{\theta\rho}\mathbf{e}_\rho + g^{\theta\theta}\mathbf{e}_\theta\\ &= \mathbf{e}_\theta/\rho^2\end{aligned}$$

EXEMPLE 13.6.5. *Déterminons la base réciproque de la base* $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *de la relativité restreinte.*

(1) *En utilisant la définition de la base réciproque* (64) *p. 116. Pour le vecteur réciproque* $\mathbf{e}^0$ *porté par la coordonnée temporelle :*

$$\begin{cases} \mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{e}_0 = 1 \\ \mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \\ \mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \\ \mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \end{cases}$$

En convention de genre temps :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 &= 1 \\ &= \mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}^0 &= \mathbf{e}_0 \end{aligned}$$

Pour le vecteur réciproque $\mathbf{e}^1$ *porté par la première coordonnée spatiale :*

$$\begin{cases} \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_0 = 0 \\ \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1 \\ \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \\ \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 &= -1 \\ &= -\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}^1 \end{aligned}$$

De même $\mathbf{e}^2 = -\mathbf{e}_2$ *et* $\mathbf{e}^3 = -\mathbf{e}_3$.

(2) *D'après* (61) *p. 106 le tenseur métrique en relativité restreinte est égal à son inverse :*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^0 \\ \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ -\mathbf{e}_1 \\ -\mathbf{e}_2 \\ -\mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

13.7 Composantes contravariantes dans la base réciproque

À partir de la définition 3.2.9 p. 28 des composantes contravariantes dans la base réciproque :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{OM} &= \mathrm{u}^i \boldsymbol{\epsilon}_i \\ &= \sum_i \mathrm{u}^i \mathbf{e}^i \\ \forall j \quad \boldsymbol{OM} \cdot \mathbf{e}_j &= \sum_i \mathrm{u}^i \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j \\ \forall j \quad u_j &= \sum_i \mathrm{u}^i \delta^i_j \end{aligned}$$

par conséquent :

$$\boxed{\forall j \quad u_j = \mathrm{u}^j} \tag{66}$$

et

$$\boxed{\boldsymbol{OM} = u_i \mathbf{e}^i} \tag{67}$$

Exemple 13.7.1. *En reprenant l'exercice 13.6.3 p. 118, représentons les composantes contravariantes du vecteur* $\mathbf{u} = \boldsymbol{OM}$ *dans la base réciproque* $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)$ *non normée (Fig. 13.2) :*

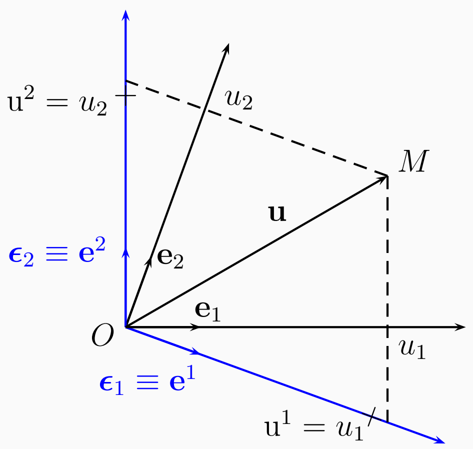


Fig. 13.2 – Composantes contravariantes dans la base réciproque

13.8 Composantes covariantes dans la base réciproque

À partir de la définition 3.2.9 p. 28 des composantes contravariantes dans la base d'origine :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{OM} &= u^i \mathbf{e}_i \\ \forall j \quad \boldsymbol{OM} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j &= u^i \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j \\ \forall j \quad \mathrm{u}_j &= u^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j \\ \forall j \quad \mathrm{u}_j &= u^i \delta^j_i \end{aligned}$$

par conséquent :

$$\forall j \quad \mathrm{u}_j = u^j \tag{68}$$

et

$$\forall i \quad \boldsymbol{OM} \cdot \mathbf{e}^i = u^i$$

Exemple 13.8.1. *En reprenant l'exercice 13.6.3 p. 118, représentons les composantes covariantes du vecteur* $\mathbf{u} = \boldsymbol{OM}$ *dans la base réciproque* $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)$ *non normée (Fig. 13.3) :*

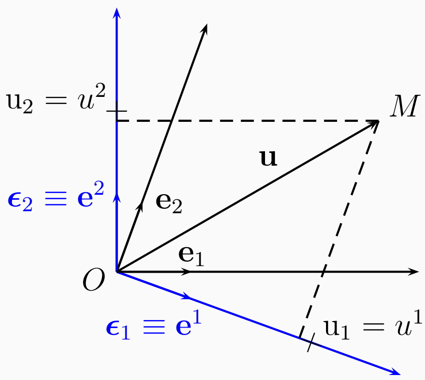


Fig. 13.3 – Composantes covariantes dans la base réciproque

14

Formes bilinéaires

DÉFINITION 14.0.1. *Forme bilinéaire*
Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels $\mathbb{R}$. Une forme bilinéaire est une application qui à deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de $E \times E$ associe un scalaire de son propre corps $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} B : E \times E &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} &\mapsto B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha \end{aligned}$$

et qui est linéaire dans chacun de ses deux arguments. B est linéaire dans le premier espace vectoriel,

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} B(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ B(\lambda \odot \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \lambda B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

et B est linéaire dans le second espace vectoriel :

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) &= B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ B(\mathbf{u}, \lambda \odot \mathbf{v}) &= \lambda B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Les formes bilinéaires généralisent les formes linéaires, en ce sens qu'elles prennent en entrée deux vecteurs plutôt qu'un seul. On appelle les formes linéaires des *une-formes*, et les formes bilinéaires des *deux-formes*, ce qui permet de généraliser aux *n-formes* qui prennent en entrée n vecteurs et donnent en sortie un scalaire.

DÉFINITION 14.0.2. *Forme bilinéaire symétrique*
Une forme bilinéaire est symétrique si :

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \qquad B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

EXEMPLE 14.0.1. *Le tenseur métrique est une forme bilinéaire symétrique. En effet :*

$$\begin{aligned} g : E \times E &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} &\mapsto g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha \end{aligned}$$

g est linéaire dans ses deux arguments :

$$g_{ij}u^iv^j = g_{ij}\left(a^i + b^i\right)v^j = \left(g_{ij}a^i + g_{ij}b^i\right)v^j = g_{ij}a^iv^j + g_{ij}b^iv^j$$
$$g_{ij}u^iv^j = g_{ij}u^i\left(a^j + b^j\right) = u^i\left(g_{ij}a^j + g_{ij}b^j\right) = g_{ij}u^ia^j + g_{ij}u^ib^j$$
$$g_{ij}\left(\lambda u^i\right)v^j = \lambda g_{ij}u^iv^j = g_{ij}u^i\left(\lambda v^j\right)$$

et g est symétrique :

$$g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = g(\mathbf{v},\mathbf{u})$$

DÉFINITION 14.0.3. *Forme bilinéaire antisymétrique*
Une forme bilinéaire est antisymétrique si :

$$\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \qquad B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -B(\mathbf{v},\mathbf{u})$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u},\mathbf{u}) &= -B(\mathbf{u},\mathbf{u}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

14.1 Expression analytique d'une forme bilinéaire

Dans la base $(\mathbf{e}_i)$ de l'espace vectoriel E_n, soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs :

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= B(u^i\mathbf{e}_i, v^j\mathbf{e}_j) \\ &= u^iv^jB(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) \\ &= u^iv^ja_{ij} \end{aligned}$$

où

$$\forall i,j\ a_{i,j} \in \mathbb{R}, \quad a_{ij} = B(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$$

La forme bilinéaire $B(\mathbf{u},\mathbf{v})$ est donc parfaitement déterminée par les n^2 scalaires a_{ij}, sa décomposition étant unique. Ainsi on peut déterminer une forme bilinéaire par correspondance des couples de vecteurs de base avec des scalaires déterminés.

EXEMPLE 14.1.1. *Considérons la forme bilinéaire sur $E_2 \times E_2$:*

$$B(\mathbf{u},\mathbf{v}) = au^1v^1 + b(u^1v^2) + b'(u^2v^1) + cu^2v^2$$

où a, b, b', c sont des scalaires.

14.1.1 Expression analytique d'une forme bilinéaire symétrique

Lorsque la forme bilinéaire est symétrique

$$a_{ij} = a_{ji}$$

sa décomposition est déterminée par les $n(n+1)/2$ scalaires a_{ij}.

Exemple 14.1.2. *Considérons la forme bilinéaire sur* $E_2 \times E_2$ *:*

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = au^1v^1 + b(u^1v^2 + u^2v^1) + cu^2v^2$$

où a, b, c *sont des scalaires.*

14.1.2 Expression analytique d'une forme bilinéaire antisymétrique

Lorsque la forme bilinéaire est antisymétrique

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

sa décomposition est déterminée par les $n(n-1)$ scalaires a_{ij}.

Exemple 14.1.3. *Considérons la forme bilinéaire sur* $E_2 \times E_2$ *:*

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= b\left(u^1v^2\right) - b\left(u^2v^1\right) \\ &= b\left(u^1v^2 - u^2v^1\right) \end{aligned}$$

où b *est un scalaire.*

14.2 Forme quadratique associée à une forme bilinéaire

Soit B une forme bilinéaire symétrique et soit Q la forme quadratique telle que :

$$\begin{aligned} Q : E &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{u} &\mapsto Q(\mathbf{u}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \end{aligned}$$

Q est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique B. Supposons B symétrique, en utilisant la linéarité des formes bilinéaires :

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= B(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= B(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u}) + B(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= Q(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + Q(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Soit Q une forme quadratique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E dans le corps des réels $\mathbb{R}$ et soit B la forme bilinéaire symétrique telle que :

$$\begin{aligned} B : E \times E &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} &\mapsto B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \tfrac{1}{2}\left[Q(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) - Q(\boldsymbol{u}) - Q(\boldsymbol{v})\right] \end{aligned}$$

B est la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique Q. Toute forme quadratique définit une forme bilinéaire et réciproquement. Les formes bilinéaires symétriques et les formes quadratiques se déterminent mutuellement. Les théories des formes bilinéaires symétriques et des formes quadratiques sont essentiellement les mêmes.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} Q(\lambda \odot \mathbf{u}) &= B(\lambda \odot \mathbf{u}, \lambda \odot \mathbf{u}) \\ &= \lambda^2 B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \\ &= \lambda^2 Q(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Pour $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} Q(0 \odot \mathbf{u}) &= 0^2 Q(\mathbf{u}) \\ Q(\mathbf{0}) &= 0 \end{aligned}$$

14.3 Expression analytique d'une forme quadratique

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{u}) &= B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \\ &= B(u^i \mathbf{e}_i, u^j \mathbf{e}_j) \\ &= u^i u^j B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \end{aligned}$$

Exemple 14.3.1. *Considérons la forme bilinéaire sur $E_2 \times E_2$:*

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= a u^1 u^1 + b(u^1 u^2 + u^2 u^1) + c u^2 u^2 \\ &= a(u^1)^2 + 2b(u^1 u^2) + c(u^2)^2 \end{aligned}$$

où a, b, c sont des scalaires.

14.4 Matrices et formes bilinéaires

Une transformation linéaire est une matrice carrée prenant en entrée un vecteur et donnant en sortie un vecteur. Les matrices carrées ne peuvent donc pas représenter aussi les formes bilinéaires qui elles prennent en entrée un vecteur et donnent en sortie une forme linéaire. Une représentation des formes bilinéaires reste cependant possible sous la forme d'une matrice ligne de matrices lignes. La relation (46) p. 101 s'écrit :

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} &= \left(\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \end{pmatrix} u^1 \quad \begin{pmatrix} g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} u^2\right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} g_{11}u^1 & g_{12}u^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{21}u^2 & g_{22}u^2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} g_{11}u^1 + g_{21}u^2 & g_{12}u^1 + g_{22}u^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{pmatrix} g_{11}u^1 + g_{21}u^2 & g_{12}u^1 + g_{22}u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$$

qui redonne bien le système :

$$\begin{cases} u_1 = g_{11}\, u^1 + g_{21}\, u^2 \\ u_2 = g_{12}\, u^1 + g_{22}\, u^2 \end{cases}$$

Dans un espace vectoriel de dimension trois, le tenseur métrique s'écrit :

$$\left(\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}\right)$$

Pour inverser G nous devons revenir à une matrice carrée. De plus, cette notation n'est pas applicable à des tenseurs ayant plus de deux indices.

Exemple 14.4.1. *Soit* $\{\mathbf{e}_1(2,0), \mathbf{e}_2(-1,3)\}$ *une base de l'espace vectoriel* E_2*. Le tenseur métrique s'écrit :*

$$\begin{cases} g_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 4 \\ g_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = -2 \\ g_{21} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = -2 \\ g_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \quad G\Big(\begin{pmatrix}4 & -2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-2 & 10\end{pmatrix}\Big)$$

Exemple 14.4.2. *Dans l'espace de la physique classique non relativiste, plaçons nous dans la base orthonormée* $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$*. Le tenseur métrique s'écrit :*

$$\Big(\begin{pmatrix}\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z\end{pmatrix}\Big)$$
$$= \Big(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Big)$$

Exemple 14.4.3. *Plaçons-nous dans l'une des deux bases canoniques* $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$*, de l'espace-temps de la relativité restreinte en deux dimensions d'espace :*

$$\begin{cases} \mathbf{e}_0(i,0,0) \\ \mathbf{e}_1(0,1,0) \\ \mathbf{e}_2(0,0,1) \end{cases}$$

Le tenseur métrique s'écrit :

$$\Big(\begin{pmatrix}\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\Big)$$
$$= \Big(\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Big)$$

Exemple 14.4.4. *Dans une base* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ *de* E_2*, on se donne le tenseur métrique suivant :*

$$G\Big(\begin{pmatrix}2 & -3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-3 & 1\end{pmatrix}\Big)$$

Déterminons les composantes de son inverse $[g^{ij}]$ *grâce aux relations* (51) *p. 102 :*

$$\begin{cases} g_{11}g^{11} + g_{12}g^{21} = \delta^1{}_1 \\ g_{11}g^{12} + g_{12}g^{22} = \delta^2{}_1 \\ g_{21}g^{11} + g_{22}g^{21} = \delta^1{}_2 \\ g_{21}g^{12} + g_{22}g^{22} = \delta^2{}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2g^{11} - 3g^{21} = 1 \\ 2g^{12} - 3g^{22} = 0 \\ -3g^{11} + g^{21} = 0 \\ -3g^{12} + g^{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g^{11} = -1/7 \\ g^{12} = -3/7 \\ g^{21} = -3/7 \\ g^{22} = -2/7 \end{cases}$$

$$\left[g^{ij}\right] = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}-1/7 \\ -3/7\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}-3/7 \\ -2/7\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

La matrice de matrice suggère d'introduire un nouveau produit matriciel, le produit de Kronecker.

15

Produit de Kronecker

15.1 Introduction

Le produit de Kronecker de deux matrices de tailles arbitraires, carrées ou rectangulaires, donne une matrice de sous-matrices. Le produit de Kronecker de deux matrices s'écrit :

$$
\begin{aligned}
A \otimes B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes B \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} & a_{12} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\ a_{21} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} & a_{22} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{11}b_{23} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{13} \\ a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{12}b_{23} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{21}b_{23} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{22}b_{13} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Contrairement à la multiplication matricielle les matrices n'ont pas besoin d'être compatibles.

15.2 Propriétés

Propriétés 15.2.1. *Propriétés du produit de Kronecker*

(1) Associativité :

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$$

(2) Distributivité à gauche par rapport à l'addition matricielle :

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$$

(3) Distributivité à droite par rapport à l'addition matricielle :

$$(B + C) \otimes A = B \otimes A + C \otimes A$$

(4) Multiplication par un scalaire :

$$k(A \otimes B) = (kA) \otimes B = A \otimes (kB)$$

(5) En général non commutativité :

$$A \otimes B \neq B \otimes A$$

15.3 Exemples

Exemple 15.3.1. *Produit de Kronecker de deux matrices colonnes*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ a_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Le résultat est une matrice colonne de matrices colonnes, c'est-à-dire une matrice ayant deux éléments et non quatre.

Exemple 15.3.2. *Produit de Kronecker d'une matrice colonne par une matrice ligne*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ a_2 \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Le résultat est une matrice colonne de matrices lignes. La pré-multiplication matricielle de ce résultat (et non le produit de Kronecker) par une forme linéaire $\tilde{u}$ donne une forme *linéaire,*

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}u_1 & u_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a_2b_1 & a_2b_2\end{pmatrix}\end{pmatrix} &= u_1\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2\end{pmatrix} + u_2\begin{pmatrix}a_2b_1 & a_2b_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}u_1a_1b_1 & u_1a_1b_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}u_2a_2b_1 & u_2a_2b_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}u_1a_1b_1 + u_2a_2b_1 & u_1a_1b_2 + u_2a_2b_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

puis la post-multiplication matricielle par un vecteur $\mathbf{v}$ *donne un scalaire :*

$$\begin{pmatrix}u_1a_1b_1 + u_2a_2b_1 & u_1a_1b_2 + u_2a_2b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\end{pmatrix} = u_1a_1b_1v^1 + u_2a_2b_1v^1 + u_1a_1b_2v^2 + u_2a_2b_2v^2$$

Exemple 15.3.3. *Produit de Kronecker d'une matrice ligne par une matrice colonne*

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}b_1 & b_2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}b_1\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix} & b_2\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1a_1\\ b_1a_2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}b_2a_1\\ b_2a_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Le résultat est une matrice ligne de matrices colonnes. La post-multiplication matricielle de ce résultat par un vecteur $\mathbf{v}$ *donne un vecteur,*

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1a_1\\ b_1a_2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}b_2a_1\\ b_2a_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1a_1\\ b_1a_2\end{pmatrix}v^1 + \begin{pmatrix}b_2a_1\\ b_2a_2\end{pmatrix}v^2\end{pmatrix}\\ &= \left[\begin{pmatrix}b_1a_1v^1\\ b_1a_2v^1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_2a_1v^2\\ b_2a_2v^2\end{pmatrix}\right]\\ &= \begin{pmatrix}b_1a_1v^1 + b_2a_1v^2\\ b_1a_2v^1 + b_2a_2v^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

puis la pré-multiplication par une forme linéaire $\tilde{u}$ *donne le même scalaire qu'en 15.3.2 :*

$$\begin{pmatrix}u_1 & u_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1a_1v^1 + b_2a_1v^2\\ b_1a_2v^1 + b_2a_2v^2\end{pmatrix} = u_1b_1a_1v^1 + u_1b_2a_1v^2 + u_2b_1a_2v^1 + u_2b_2a_2v^2$$

15.4 Formes bilinéaires

Le produit de Kronecker d'une matrice ligne par une matrice ligne donne une matrice ligne de matrices lignes :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a_1 & a_2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}b_1 & b_2\end{pmatrix} &= \left[a_1\begin{pmatrix}b_1 & b_2\end{pmatrix} \quad a_2\begin{pmatrix}b_1 & b_2\end{pmatrix}\right]\\ &= \left[\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}a_2b_1 & a_2b_2\end{pmatrix}\right]\end{aligned}$$

On note que :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}b_1 & b_2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}a_1 & a_2\end{pmatrix} &= \begin{bmatrix}b_1\begin{pmatrix}a_1 & a_2\end{pmatrix} & b_2\begin{pmatrix}a_1 & a_2\end{pmatrix}\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\begin{pmatrix}b_1a_1 & b_1a_2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}b_2a_1 & b_2a_2\end{pmatrix}\end{bmatrix} \\ &\neq \begin{pmatrix}a_1 & a_2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}b_1 & b_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On vérifie que c'est une forme bilinéaire. La multiplication matricielle par un premier vecteur **u** donne une forme linéaire :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}a_2b_1 & a_2b_2\end{pmatrix}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u^1 \\ u^2\end{pmatrix} &= \begin{bmatrix}\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2\end{pmatrix}u^1 + \begin{pmatrix}a_2b_1 & a_2b_2\end{pmatrix}u^2\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\begin{pmatrix}a_1b_1u^1 & a_1b_2u^1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_2b_1u^2 & a_2b_2u^2\end{pmatrix}\end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}a_1b_1u^1 + a_2b_1u^2 & a_1b_2u^1 + a_2b_2u^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

La multiplication matricielle par un second vecteur **v** donne un scalaire :

$$\begin{pmatrix}a_1b_1u^1 + a_2b_1u^2 & a_1b_2u^1 + a_2b_2u^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1 \\ v^2\end{pmatrix} = a_1b_1u^1v^1 + a_2b_1u^2v^1 + a_1b_2u^1v^2 + a_2b_2u^2v^2$$

16

Espaces vectoriels

16.1 Signature d'un espace vectoriel pré-euclidien

Grâce au théorème 12.8.1 p. 106 de Gram-Schmidt plaçons nous dans une base orthogonale d'un espace vectoriel pré-euclidien. Dans cette base le tenseur métrique est diagonal et les coefficients g_{ij} sont des constantes. Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ s'écrit

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{11} u^1 v^1 + g_{22} u^2 v^2 + \cdots + g_{nn} u^n v^n$$

et la norme d'un vecteur non nul $\mathbf{u}$ a pour expression :

$$\|\mathbf{u}\| = \left[g_{11} \left(u^1\right)^2 + g_{22} \left(u^2\right)^2 + \cdots + g_{nn} \left(u^n\right)^2 \right]^{1/2}$$

Définition 16.1.1. *Signature d'un espace vectoriel pré-euclidien*
On appelle signature d'un espace vectoriel l'ensemble des signes positifs et négatifs apparaissant dans l'expression du produit scalaire de deux vecteurs ou de la norme d'un vecteur, où l'on a remplacé tous les g_{ii} par leur valeur respective, positive ou négative. Le nombre de signes $+$ et de signes $-$ est une caractéristique intrinsèque de l'espace vectoriel, indépendante de la base orthogonale considérée.

Si la signature ne comporte que des signes identiques, la forme quadratique est alors définie et l'espace vectoriel est euclidien. Si elle ne comporte que des signes positifs, elle est définie positive. Tous les g_{ii} sont positifs, le produit scalaire est euclidien et la norme d'un vecteur non nul est strictement positive.

Si la signature comporte des signes différents, le produit scalaire n'est plus euclidien, la norme s'appelle pseudo-norme (voir 11.6 p. 94) car elle ne satisfait pas à la condition de séparation. L'espace est pseudo-euclidien, son tenseur métrique est de la forme

$$\forall i, j \quad g_{ij} = \pm \delta_{ij}$$

avec au moins un signe positif et un signe négatif.

Exemple 16.1.1. *Dans une base orthonormée de l'espace newtonien de la physique classique non relativiste, le produit scalaire s'écrit :*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3$$

C'est l'espace euclidien de dimension 3*, de signature* $(+++)$*.*

Exemple 16.1.2. *À la surface d'un cylindre de rayon* ρ*, plaçons nous dans la base naturelle* $(\mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$ *associée aux coordonnées cylindriques* (ϕ, z) *(voir la figure 7.3 p. 63). Le tenseur métrique s'écrit*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où ρ *est constant. C'est l'espace euclidien de dimension* 2*, de signature* $(++)$*. Le tenseur métrique est le même que celui d'un plan car en déroulant un cylindre (ou un cône) on obtient un plan.*

Exemple 16.1.3. *Dans une base orthonormée de l'espace-temps de la relativité restreinte, le quadri-produit scalaire s'écrit :*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^0 v^0 - u^1 v^1 - u^2 v^2 - u^3 v^3$$

C'est un espace pseudo-euclidien de dimension 4*, de signature* $(+---)$*.*

Exemple 16.1.4. *Cherchons la signature de l'espace plat dont la métrique s'écrit :*

$$\varepsilon ds^2 = 4\left(dx^1\right)^2 + 5\left(dx^2\right)^2 - 2\left(dx^3\right)^2 + 2\left(dx^4\right)^2 - 4dx^2dx^3 - 4dx^2dx^4 - 10dx^3dx^4$$

$$\begin{aligned} \det[G - \lambda I] &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2-\lambda & -5 \\ 0 & -2 & -5 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & -2-\lambda & -5 \\ -2 & -5 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(4-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 0 \\ -2 & 2+\lambda & -3+\lambda \\ -2 & 5 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(4-\lambda)\left[(5-\lambda)\left(29-\lambda^2\right) + 8(5-\lambda)\right] \\ &= -(4-\lambda)(5-\lambda)\left(37-\lambda^2\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont les suivantes :

$$\lambda = +4, +5, +\sqrt{37}, -\sqrt{37}$$

Il existe une transformation des coordonnées telle que dans le nouveau système la métrique s'écrive :

$$\begin{aligned}\varepsilon ds^2 &= 4\left(dx^1\right)^2 + 5\left(dx^2\right)^2 + \sqrt{37}\left(dx^3\right)^2 - \sqrt{37}\left(dx^4\right)^2 \\ &= \left(d\bar{x}^1\right)^2 + \left(d\bar{x}^2\right)^2 + \left(d\bar{x}^3\right)^2 - \left(d\bar{x}^4\right)^2\end{aligned}$$

Par conséquent la signature est $(+++-)$.

Un espace vectoriel sur lequel est défini un produit scalaire est appelé *espace vectoriel pré-euclidien* (définition 11.2.2 p. 90). Les espaces vectoriels pré-euclidiens sont plats, ce sont des cas particuliers d'espaces riemanniens.

D'après le théorème de Gram-Schmidt, dans tout espace pré-euclidien on peut trouver une base orthonormale ou pseudo-orthonormale globale (par exemple en relativité restreinte), c'est-à-dire un tenseur métrique diagonal (base pseudo-orthonormale) dont les termes sont indépendants des coordonnées (base globale). À cette base nous pouvons associer un système de coordonnées rectangulaires global. En revanche, dans un espace courbe il n'existe pas de base globale. Le tenseur métrique peut être diagonal mais ses éléments dépendent des coordonnées, il est local.

16.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 16.2.1. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*
Soient $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$ *deux vecteurs de* E_n *:*

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leqslant \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

Démonstration. $\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n$, formons le carré de la norme du vecteur $\lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}(\lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v})^2 &= (\lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v})\cdot(\lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v}) \\ &= \lambda\mathbf{u}\cdot(\lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot(\lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v}) \\ &= (\lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v})\cdot\lambda\mathbf{u} + (\lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v})\cdot\mathbf{v} \\ &= \lambda\mathbf{u}\cdot\lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \\ &= \mathbf{u}^2\lambda^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\lambda + \mathbf{v}^2\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}(\lambda\mathbf{u}\oplus\mathbf{v})^2 &\geqslant 0 \\ \mathbf{u}^2\lambda^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\lambda + \mathbf{v}^2 &\geqslant 0\end{aligned}$$

Ce trinôme de degré deux en λ, où λ est ici la variable et non un paramètre, est positif ou nul si son discriminant (réduit) est négatif ou nul :

$$\begin{aligned}\Delta' &\leqslant 0 \\ (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 - \mathbf{u}^2\mathbf{v}^2 &\leqslant 0 \\ (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 &\leqslant \mathbf{u}^2\mathbf{v}^2 \\ |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| &\leqslant \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\end{aligned}$$

□

De plus, si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont proportionnels :

$$\exists!\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{0}$$
$$(\lambda\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})^2 = 0$$
$$\mathbf{u}^2\lambda^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\lambda + \mathbf{v}^2 = 0$$
$$\lambda \text{ étant unique, } \Delta' = 0$$
$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

Réciproquement, si on a l'égalité, alors :

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$
$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 - \mathbf{u}^2\mathbf{v}^2 = 0$$
$$\exists\lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{u}^2\lambda^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\lambda + \mathbf{v}^2 \text{ avec } \Delta' = 0$$
$$\exists\lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})^2 = 0$$
$$\exists\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

THÉORÈME 16.2.2. *Inégalité triangulaire*
$\forall\mathbf{u},\mathbf{v} \in E_n$:

$$\|\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

DÉMONSTRATION. À partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leqslant \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$
$$\mathbf{u}^2 + 2|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| + \mathbf{v}^2 \leqslant \mathbf{u}^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \mathbf{v}^2$$
$$\|\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}\|^2 \leqslant (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$$
$$\|\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

□

16.3 Angle entre deux vecteurs

En partant de la définition géométrique du produit scalaire de deux vecteurs non nuls :

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\mathbf{u},\mathbf{v})$$
$$\cos(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

Dans un espace de métrique définie positive, à partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leqslant \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$
$$\frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant \cos(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leqslant 1$$

L'angle des deux vecteurs $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ existe, est unique et compris entre 0 et π. Si les vecteurs sont définis par leurs composantes contravariantes :

$$\cos(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{g_{ij}u^iv^j}{\sqrt{g_{pq}u^pu^q}\sqrt{g_{rs}v^rv^s}} \tag{69}$$

L'angle étant défini uniquement à partir de produits scalaires, il est invariant par changement de coordonnées.

Théorème 16.3.1. *On considère la base naturelle d'un système de coordonnées quelconque. Soit G le tenseur métrique local. Si* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$ *sont les vecteurs tangents à deux familles de courbes, alors ces familles sont mutuellement orthogonales ssi*

$$g_{ij}u^i v^j = 0$$

Définition 16.3.1. *Vecteur normal à une surface*
Un vecteur est normal à une surface en un point P de cette surface, s'il est orthogonal au vecteur tangent de toute courbe appartenant à la surface et passant par ce point P.

Dans un système de coordonnées (x^i) d'un espace vectoriel euclidien, considérons l'hyper-surface de coordonnée $x^\alpha = c^{ste}$. Tout vecteur $\mathbf{T}$ tangent à cette surface a sa composante t^α nulle :

$$\begin{aligned} t^\alpha &= \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \\ &= 0 \end{aligned}$$

où λ est un paramètre. Le vecteur $\mathbf{N}$ de composantes contravariantes

$$n^i = g^{i\alpha}$$

est normal à cette hyper-surface :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} &= g_{ij} n^i t^j \\ &= g_{ij} g^{i\alpha} t^j \\ &= g^{i\alpha} t_i \\ &= t^\alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous en déduisons l'expression de l'angle θ entre les normales aux surfaces $x^\alpha = c^{ste}$ et $x^\beta = c^{ste}$. En appelant $\mathbf{u}\left(g^{i\alpha}\right)$ et $\mathbf{v}\left(g^{j\beta}\right)$ les normales aux hyper-surfaces, la relation (69) p. 136 donne :

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{g_{ij} g^{i\alpha} g^{j\beta}}{\sqrt{g_{pq} g^{p\alpha} g^{q\alpha}} \sqrt{g_{rs} g^{r\beta} g^{s\beta}}} \\ &= \frac{g^{\alpha\beta}}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}} \sqrt{g^{\beta\beta}}} \end{aligned}$$

En conséquence en coordonnées orthogonales (curvilignes ou rectilignes), donc pour lesquelles le cosinus de l'angle est nul, en tout point

$$\forall i \neq j \quad g_{ij} = 0$$

ou de façon équivalente

$$\forall i \neq j \quad g^{ij} = 0$$

Des exemples de coordonnées curvilignes orthogonales sont donnés en annexe 27.4 p. 375.

Soit (x^i) un système de coordonnées et $x^\alpha(\lambda) = \lambda$ une ligne de coordonnée de paramètre λ, les autres coordonnées étant nulles :

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad \begin{cases} i = \alpha, & x^\alpha = \lambda \\ i \neq \alpha, & x^i = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \forall i = 1, \dots, n \qquad x^i = \lambda \delta^i_\alpha$$

Soit une autre ligne de coordonnées d'équation :

$$\forall j = 1, \dots, n \quad x^j = \lambda \delta^j_\beta$$

La relation (69) p. 136 donne l'angle ϕ entre ces deux lignes de coordonnées :

$$\begin{aligned} \cos(\phi) &= \frac{g_{ij} \lambda \delta^i_\alpha \lambda \delta^j_\beta}{\sqrt{g_{pq} \lambda \delta^p_\alpha \lambda \delta^q_\alpha} \sqrt{g_{rs} \lambda \delta^r_\beta \lambda \delta^s_\beta}} \\ &= \frac{g_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}} \sqrt{g_{\beta\beta}}} \end{aligned}$$

En général il est différent de l'angle θ trouvé précédemment.

Exemple 16.3.1. *Soient* $\mathbf{u}(1, 0, -2, -1, 0)$ *et* $\mathbf{v}(0, 0, 2, 2, 0)$ *deux vecteurs de* E_5*, alors :*

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}^2 = 1^2 + 0^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 6 \\ &\mathbf{v}^2 = 0^2 + 0^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 = 8 \\ &\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \times 0 + 0 \times 0 - 2 \times 2 - 1 \times 2 + 0 \times 0 = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{-6}{\sqrt{6}\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

Exemple 16.3.2. *En coordonnées polaires, cherchons la famille de courbes orthogonale à la famille de courbes suivante :*

$$\theta = \rho - c$$

où c est une constante. Nous pouvons la paramétrer sous la forme :

$$\begin{cases} \rho(t) = t \\ \theta(t) = t - c \end{cases}$$

Le champ de vecteurs tangents à cette famille de courbes,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^\rho \\ u^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{d\rho}/_{dt} \\ {}^{d\theta}/_{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est constant dans le système de coordonnées polaires. Nous cherchons la famille de courbes de paramètre τ, c'est-à-dire $\rho(\tau)$ et $\theta(\tau)$, dont le champ de vecteurs tangents

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v^\rho \\ v^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{d\rho}/_{d\tau} \\ {}^{d\theta}/_{d\tau} \end{pmatrix}$$

est tel que le nominateur de la relation (69) *p.* *136* *soit nul :*

$$
\begin{aligned}
g_{ij}u^i v^j &= 0 \\
g_{\rho\rho}u^\rho v^\rho + g_{\rho\theta}u^\rho v^\theta + g_{\theta\rho}u^\theta v^\rho + g_{\theta\theta}u^\theta v^\theta &= 0 \\
v^\rho + \rho^2 v^\theta &= 0 \\
\frac{d\rho}{d\tau} + \rho^2 \frac{d\theta}{d\tau} &= 0
\end{aligned}
$$

On résoud l'équation différentielle à variables séparables :

$$
\begin{aligned}
\frac{d\rho}{\rho^2} &= -d\theta \\
\rho^{-1} &= \theta + c \\
\rho &= \frac{1}{\theta + c}
\end{aligned}
$$

où c est une constante.

Exemple 16.3.3. *Soient deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sur une sphère de rayon a. Cherchons la condition pour que ces courbes soient orthogonales. En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) (voir la figure* *7.4 p. 64**). Les équations des courbes sont les suivantes :*

$$
\mathscr{C}_1 \quad : \quad \phi = f(\theta) \qquad \textit{et} \qquad \mathscr{C}_2 \quad : \quad \phi = g(\theta)
$$

Nous pouvons les paramétrer :

$$
\mathscr{C}_1(t) \quad : \quad \begin{cases} r = a \\ \theta = t \\ \phi = f(t) \end{cases} \qquad \textit{et} \qquad \mathscr{C}_2(\tau) \quad : \quad \begin{cases} r = a \\ \theta = \tau \\ \phi = g(\tau) \end{cases}
$$

Les vecteurs tangents à ces courbes sont respectivement :

$$
\mathbf{u} = (0, 1, d_t f(\theta)) \qquad \textit{et} \qquad \mathbf{v} = (0, 1, d_\tau g(\theta))
$$

D'après la relation (69) *p.* *136**, ces courbes sont orthogonales au point d'intersection (a, θ_0, ϕ_0) ssi le produit scalaire des vecteurs tangents est nul, $g_{ij}u^i v^j = 0$. En se servant de la relation* (16) *p.* *48* *:*

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & d_t f\,(\theta)\,|_{\theta=\theta_0} \end{pmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a\sin(\theta)_0)^2 \end{bmatrix}
\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ d_\tau g\,(\theta)\,|_{\theta=\theta_0} \end{pmatrix} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
a^2 + d_t f\,(\theta)\,|_{\theta=\theta_0}\,(a\sin(\theta)_0)^2\, d_\tau g\,(\theta)\,|_{\theta=\theta_0} &= 0 \\
d_t f\,(\theta)\,|_{\theta=\theta_0} d_\tau g\,(\theta)\,|_{\theta=\theta_0} &= -\sin^{-2}\theta_0
\end{aligned}
$$

Exemple 16.3.4. *Soient en coordonnées cylindriques* $\mathbf{u}\,(0, 1, 2b\phi)$ *et* $\mathbf{v}\,(0, -2b\phi, \rho^2)$ *deux vecteurs, où* b *est une constante. Montrons qu'ils sont orthogonaux :*

$$\begin{aligned} g_{ij}u^i v^j &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2b\phi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2b\phi \\ \rho^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2b\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2b\phi\rho^2 \\ \rho^2 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{u}$ *est le champ de vecteurs tangents à la courbe paramétrique de paramètre* t

$$\mathscr{C}(t) \quad : \quad \rho = a, \quad \phi = t, \quad z = bt^2$$

car en dérivant on retrouve $\mathbf{u}$ *:*

$$d\rho/dt = da/dt = 0, \qquad d\phi/dt = dt/dt = 1, \qquad dz/dt = d(bt^2)/dt = 2bt = 2b\phi$$

D'après son équation paramétrique, $\mathscr{C}(t)$ *est une hélice à pas variable sur le cylindre droit de rayon* a*. De même, la courbe* $\mathscr{L}(\tau)$ *de paramètre* τ *:*

$$\mathscr{L}(\tau) \quad : \quad \rho = a, \quad \frac{d\phi}{d\tau} = -2b\phi, \quad \frac{dz}{d\tau} = a^2$$

a pour champ de vecteurs tangents $\mathbf{v}$*. Cette courbe est orthogonale à la courbe* $\mathscr{C}$*. La courbe* $\mathscr{L}$ *s'écrit aussi :*

$$\rho = a, \quad \frac{d\phi}{\phi} = -2bd\tau, \quad z = a^2\tau + c_1$$

Supposons qu'à $\tau = 0,\ z = 0$ *:*

$$\begin{aligned} &\rho = a, \quad \ln\phi = -2b\tau + c_2, \quad z = a^2\tau \\ &\rho = a, \quad \phi = C\exp\left(-2bz/a^2\right) \end{aligned}$$

Cette solution n'inclue pas toutes les courbes orthogonales à $\mathscr{C}$ *car certaines n'ont pas pour champ de vecteurs tangents* $\mathbf{v}$*.*

Lorsque la métrique de l'espace est indéfinie, l'angle entre deux vecteurs $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ non nuls donnés en composantes contravariantes s'écrit :

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \\ &= \frac{g_{ij}u^i v^j}{\sqrt{\varepsilon_1 g_{pq}u^p u^q}\sqrt{\varepsilon_2 g_{rs}v^r v^s}} \end{aligned}$$

Deux cas sont alors possibles :

(1) L'inégalité de Cauchy-Schwarz est valable :

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| &\leqslant \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \\ \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} &\leqslant 1 \\ -1 \leqslant \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\leqslant 1 \end{aligned}$$

L'angle des deux vecteurs $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ existe, est unique et compris entre 0 et π.

(2) L'inégalité de Cauchy-Schwarz n'est pas valable :

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| > \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

Nous avons alors

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k \qquad (|k| > 1)$$

Il existe une infinité de solutions pour l'angle, toutes complexes. Par convention on choisit :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{cases} i \ln\left(k + \sqrt{k^2 - 1}\right) & k > 1 \\ \pi + i \ln\left(-k + \sqrt{k^2 - 1}\right) & k < 1 \end{cases}$$

avec les limites $k \to 1^+$ et $k \to -1^-$

17

Espaces ponctuels

Au paragraphe 3.2 p. 16, à chaque vecteur nous avons associé un couple de points. Nous revenons ici sur cette correspondance.

DÉFINITION 17.0.1. *Espace ponctuel pré-euclidien*
On appelle espace ponctuel pré-euclidien, un espace ponctuel tel que l'espace vectoriel associé soit un espace pré-euclidien.

DÉFINITION 17.0.2. *Espace ponctuel euclidien*
On appelle espace ponctuel euclidien, un espace ponctuel tel que l'espace vectoriel associé soit un espace euclidien.

17.1 Repère et coordonnées d'un point

DÉFINITION 17.1.1. *Repère d'un espace ponctuel pré-euclidien*
On appelle repère $(O, \mathbf{e}_i)$ *d'un espace ponctuel* $\mathcal{E}_n$*, l'ensemble d'un point* O *de* $\mathcal{E}_n$ *appelé origine du repère, et d'une base* $(\mathbf{e}_i)$ *de l'espace vectoriel* E_n *associé à l'espace ponctuel* $\mathcal{E}_n$*.*

Définition 17.1.2. *Coordonnées d'un point*
Dans un système de coordonnées rectilignes, les coordonnées d'un point M d'un espace ponctuel $\mathcal{E}_n$ sont les n composantes contravariantes u^i du vecteur $\mathbf{u} = \boldsymbol{OM}$ dans le repère normé $(O, \mathbf{e}_i)$ de l'espace vectoriel associé E_n.

Soient deux points M et N de coordonnées respectives u^i et v^j, alors $\boldsymbol{OM} = u^i\mathbf{e}_i$ et $\boldsymbol{ON} = v^i\mathbf{e}_i$. En utilisant les deux premiers axiomes de la définition 3.2.1 p. 16 :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{MN} &= \boldsymbol{MO} + \boldsymbol{ON} \\ &= \boldsymbol{ON} - \boldsymbol{OM} \\ &= \left(v^i - u^i\right)\mathbf{e}_i \end{aligned} \tag{70}$$

$(v^i - u^i)$ sont les composantes contravariantes du vecteur $\boldsymbol{MN}$ dans la base $(\mathbf{e}_i)$.

17.2 Distance

Définition 17.2.1. *Distance euclidienne*
La distance euclidienne MN entre deux points M et N d'un espace ponctuel euclidien $\mathcal{E}$, est la norme euclidienne du vecteur $\boldsymbol{MN}$ de l'espace vectoriel euclidien normé associé à $\mathcal{E}$:

$$MN = \|\boldsymbol{MN}\|$$

Définition 17.2.2. *Distance*
La distance MN entre deux points M et N d'un espace ponctuel pré-euclidien $\mathcal{E}$, est la pseudo-norme du vecteur $\boldsymbol{MN}$ de l'espace vectoriel pré-euclidien normé associé à $\mathcal{E}$:

$$MN = \|\boldsymbol{MN}\|$$

Dans le repère $(O, \mathbf{e}_i)$, si les points M et N ont respectivement pour coordonnées x^i_M et x^i_N, d'après la définition 11.6.1 p. 94 de la norme d'un vecteur, et avec la relation (70) p. 144 :

$$\begin{aligned} MN^2 &= \left(x^i_M - x^i_N\right)\mathbf{e}_i \cdot \left(x^j_N - x^j_M\right)\mathbf{e}_j \\ &= g_{ij}\left(x^i_N - x^i_M\right)\left(x^j_N - x^j_M\right) \end{aligned} \tag{71}$$

Cette relation n'est valable que lorsque les g_{ij} ne sont pas des fonctions des coordonnées, c'est-à-dire dans un espace pré-euclidien (euclidien ou pseudo-euclidien).

Supposons N infiniment proche de M et désignons par $(x^i + dx^i)$ les coordonnées de M. Si l'on note ds la distance infinitésimale MN, la relation (71) devient la forme quadratique (voir 5.0.8 p. 44) de différentielles, appelée *forme quadratique fondamentale*

$$\boxed{ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j} \tag{72}$$

où les coefficients g_{ij} sont fonction des coordonnées x^i lorsque la base varie localement. Dans ce cas soit l'espace est pré-euclidien mais le système de coordonnées n'est pas rectiligne, soit l'espace riemannien n'est pas pré-euclidien. Lorsque $\mathcal{E}_n$ est pré-euclidien, la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt p. 373 nous assure qu'il est toujours possible de trouver une base orthonormale ou pseudo-orthonormale. Lorsque $\mathcal{E}_n$ est euclidien, les termes diagonaux du tenseur métrique valent l'unité et les termes non diagonaux sont nuls. Il ne reste que les termes carrés $dx^i dx^j,\ i = j$, les termes rectangles $dx^i dx^j,\ i \neq j$ étant nuls :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \cdots + (dx^n)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} dx^i dx^i \\ &= \delta_{ij} dx^i dx^j \end{aligned}$$

La distance est alors positive, ou nulle si les points sont confondus. Cette expression généralise à n dimensions le carré de la distance élémentaire de l'espace de la géométrie classique en coordonnées rectangulaires (théorème de Pythagore).

Exemple 17.2.1. *En coordonnées rectilignes obliques dans le plan :*

$$\begin{aligned} \Delta s &= g_{ij} \Delta x^i \Delta x^j \\ &= g_{11} \left(\Delta x^1\right)^2 + g_{12} \Delta x^1 \Delta x^2 + g_{21} \Delta x^2 \Delta x^1 + g_{22} \left(\Delta x^2\right)^2 \\ &= g_{11} \left(\Delta x^1\right)^2 + 2 g_{12} \Delta x^1 \Delta x^2 + g_{22} \left(\Delta x^2\right)^2 \\ &= \left(\Delta x^1\right)^2 + 2\cos(\alpha) \Delta x^1 \Delta x^2 + \left(\Delta x^2\right)^2 \end{aligned}$$

On retrouve la formule de Pythagore pour le triangle quelconque.

Exemple 17.2.2. *Coordonnées polaires* (ρ, θ)
Le carré de la distance infinitésimale

$$ds^2 = d\rho^2 + r^2 d\theta^2$$

est de signature $(++)$. *Le terme* $g_{11}\left(dx^1\right)^2 = d\rho^2$ *est la distance entre deux points sur la ligne de coordonnée* $x^1 = \rho$, *et* $g_{22}\left(dx^2\right)^2 = r^2 d\theta^2$ *est la distance entre deux points sur la ligne de coordonnée* $x^2 = \theta$. *Le terme croisé* $2g_{12} dx^1 dx^2$ *n'apparait pas car les coordonnées polaires sont orthogonales.*

Nous pouvons donner une nouvelle définition du système de coordonnées rectangulaire :

Définition 17.2.3. *Système de coordonnées rectangulaires*
Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, un système de coordonnées (x^i) est rectangulaire (rectiligne et orthogonal) si la distance entre deux points arbitraires $P\left(x_P^1, \ldots, x_P^n\right)$ et $Q\left(x_Q^1, \ldots, x_Q^n\right)$ est donnée par une généralisation du théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{\left(x_P^1 - x_Q^1\right)^2 + \cdots + \left(x_P^n - x_Q^n\right)^2} \\ &= \sqrt{\delta_{ij} \Delta x^i \Delta x^j} \end{aligned}$$

où $\Delta x^i = x_P^i - x_Q^i$.
En notation vectorielle :

$$\begin{aligned} d\left(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}\right) &= \|\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}\| \\ &= \sqrt{\left(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}\right)^T \left(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}\right)} \end{aligned}$$

Cherchons l'expression de la distance entre deux points lorsque l'on applique une transformation linéaire $\mathbf{u'} = A\mathbf{u}$ inversible $(\det A \neq 0)$. Posons $A^{-1} = B$ c'est-à-dire $\mathbf{u} = B\mathbf{u'}$.
La transformation linéaire conserve les distances :

$$\begin{aligned} d\left(\mathbf{u}', \mathbf{v}'\right) &= d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &= \sqrt{\left(\mathbf{u} - \mathbf{v}\right)^T \left(\mathbf{u} - \mathbf{v}\right)} \\ &= \sqrt{\left(B\mathbf{u}' - B\mathbf{v}'\right)^T \left(B\mathbf{u}' - B\mathbf{v}'\right)} \\ &= \sqrt{\left[B\left(\mathbf{u}' - \mathbf{v}'\right)\right]^T B\left(\mathbf{u}' - \mathbf{v}'\right)} \\ &= \sqrt{\left(\mathbf{u}' - \mathbf{v}'\right)^T B^T B\left(\mathbf{u}' - \mathbf{v}'\right)} \end{aligned}$$

On pose

$$G = B^T B = \left(A^{-1}\right)^T A^{-1} = \left(A^T\right)^{-1} A^{-1} = \left(AA^T\right)^{-1}$$

Les éléments de la matrice A étant des constantes, les éléments de G sont aussi des constantes.

En permettant le calcul de la distance infinitésimale localement en chaque point et dans toutes les directions, les g_{ij} caractérisent complètement la géométrie de l'espace considéré. Ils définissent cette géométrie de manière intrinsèque sans qu'il soit nécessaire de considérer que l'hypersurface est plongée dans un espace de dimension supérieure.

17.3 Exemple de la relativité restreinte

Définition 17.3.1. *Référentiel, cas non relativiste*
Un référentiel est un système de coordonnées et une horloge.

Lorsque l'on parle de référentiel on parle du référentiel dans lequel se trouve l'observateur, pas de celui dans lequel se trouve le système observé. La définition non relativiste sous-entend l'existence préalable d'un espace unique et d'un temps unique, identiques pour tous les observateurs. Un changement de référentiel n'est alors qu'un changement d'instruments de mesure de cet espace et de ce temps.

Les référentiels (les observateurs) se déplacent les uns par rapport aux autres d'un mouvement relatif dont il faut tenir compte pour la description du système étudié.

En physique non relativiste l'espace et le temps sont absolus, mais n'ayant pas les mêmes unités il n'y a pas à proprement parler d'espace-temps car on ne pourrait y définir une distance. On note alors l'espace et le temps par le produit cartésien $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

En physique relativiste, le temps et l'espace n'ont pas d'existence intrinsèque, ils dépendent du mouvement relatif entre l'observateur et le système observé. Il existe autant d'espaces et de temps qu'il y a d'observateurs en mouvement relatif.

Définition 17.3.2. *Référentiel, cas relativiste*
Un référentiel est un espace muni d'un système de coordonnées et un temps mesuré par des horloges fixes dans cet espace.

Les référentiels ne se déplacent pas dans un espace ou dans un temps qui préexisteraient, ils emportent avec eux leur propre espace et leur propre temps.

En relativité restreinte, l'espace et le temps sont liés par la constante c, homogène à une vitesse (un espace divisé par un temps), appelée vitesse limite ou constante de structure de l'espace-temps. En multipliant le temps par cette constante on obtient une coordonnée homogène à une dimension d'espace. On mesure alors le temps en mètres (ou l'espace en secondes), ce qui ne pose pas de problème puisque l'on connait la valeur de la constante de passage c. L'espace-temps devient de fait un espace métrique à quatre dimensions $\mathbb{R}^4$, et l'on cherche à y définir une distance entre deux points (alors appelés évènements) qui soit invariante par changement de référentiel. À un changement de référentiel correspond un changement de temps et d'espace, c'est-à-dire un changement de coordonnées, qui s'effectue par la transformation de Lorentz-Poincaré.

Plaçons-nous dans le système de coordonnées rectangulaires, appelé système de coordonnées galiléennes (t, x, y, z), la coordonnée temporelle étant prise « perpendiculaire » aux coordonnées spatiales. La distance de carré $c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$ n'a pas d'intérêt car elle n'est pas invariante par la transformation de Lorentz-Poincaré. En revanche *l'intervalle d'espace-temps* ou *distance d'univers*, de carré

$$\begin{aligned} s^2 &= \pm(c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2) \\ &= \eta_{00}\, t^2 + \eta_{11}\, x^2 + \eta_{22}\, y^2 + \eta_{33}\, z^2 \end{aligned}$$

est invariant par la transformation de spéciale de Lorentz (relation 29 p. 75), l'autre invariant étant la constante de structure de l'espace-temps, c. Ces deux invariants relativistes remplacent les invariants de la physique non relativiste, la distance entre deux points de l'espace et le temps.

Pour « pseudo-normer » la base, c'est-à-dire pour avoir $\eta_{00} = \pm 1$, il suffit d'effectuer le changement de variable $\mathrm{t} = ct$, ce qui revient à poser $c = 1$. C'est ce que nous ferons, les unités de temps et d'espace étant arbitraires, comme d'ailleurs toutes les unités de la physique. Le système de coordonnées (ct, x, y, z) est appelé système de coordonnées galiléennes réduites (voir (9) p. 24).

En notant x^α les composantes contravariantes d'un évènement et x_α ses composantes covariantes,

$$\begin{aligned} s^2 &= \eta_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta \\ &= \eta_{\alpha\alpha}\, x^\alpha x^\alpha \\ &= x_\alpha x^\alpha \end{aligned}$$

où les indices grecs varient de 0 à 3. Le carré de l'intervalle entre deux évènements peut prendre des valeurs positives, négatives ou nulle, selon la distance et le temps lumière qui séparent ces deux évènements.

(1) Si l'on choisit la convention de signe suivante pour écrire l'intervalle

$$s^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

le tenseur métrique s'écrit

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ayant pour signature $(+ - --)$, de type hyperbolique normal, et pour déterminant :

$$\eta = -1$$

Dans un espace pseudo-euclidien, le déterminant peut être négatif. Pour les composantes contravariantes x^α, on adopte habituellement la notation suivante (avec $\mathrm{t} = t$, c'est-à-dire $c = 1$) :

$$x^0 = t \quad ; \quad x^1 = x \quad ; \quad x^2 = y \quad ; \quad x^3 = z$$

Le carré de l'intervalle s'écrit :

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

Pour les composantes covariantes, $x_\beta = \eta_{\alpha\beta}\, x^\alpha$, nous avons :

$$x_0 = t \quad ; \quad x_1 = -x \quad ; \quad x_2 = -y \quad ; \quad x_3 = -z$$

(2) Si l'on choisit la convention de signe opposée pour écrire l'intervalle :

$$s^2 = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

le tenseur métrique

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a pour signature $(- + ++)$, les composantes contravariantes s'écrivent de nouveau

$$x^0 = t \quad ; \quad x^1 = x \quad ; \quad x^2 = y \quad ; \quad x^3 = z$$

et le carré de l'intervalle :

$$s^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

Pour les composantes covariantes :

$$x_0 = -t \quad ; \quad x_1 = x \quad ; \quad x_2 = y \quad ; \quad x_3 = z$$

(3) Le carré de l'intervalle élémentaire peut aussi s'écrire

$$s^2 = (it)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{ou} \qquad s^2 = t^2 + (ix)^2 + (iy)^2 + (iz)^2$$

et le tenseur métrique devient :

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où les indices grecs varient de 1 à 4. La métrique a une apparence euclidienne, de signature $(++++)$. Les composantes covariantes et contravariantes sont confondues. On adopte au choix une notation avec pour quatrième coordonnée une coordonnée temporelle imaginaire (la coordonnée est imaginaire, le temps reste réel) :

$$x^1 = x \quad ; \quad x^2 = y \quad ; \quad x^3 = z \quad ; \quad x^4 = it$$

ou une notation avec des coordonnées spatiales imaginaires :

$$x^1 = ix \quad ; \quad x^2 = iy \quad ; \quad x^3 = iz \quad ; \quad x^4 = t$$

Dans ces deux cas, le carré de l'intervalle s'écrit :

$$s^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2$$

Le plan de coordonnées (x, it) ne doit pas être confondu avec le plan complexe (x, t). Dans le premier cas le carré de la pseudo-norme d'un vecteur s'écrit $x^2 - t^2$ et il peut être positif, négatif ou nul, alors que dans le second cas le carré de la norme d'un vecteur s'écrit $x^2 + t^2$.

17.4 Dérivée et différentielle d'un vecteur et d'un point

Définition 17.4.1. *Vecteur fonction d'une variable*
Soit E un espace vectoriel euclidien, et soit t une variable scalaire variant dans un intervalle (a, b). Si à chaque valeur de t nous faisons correspondre un vecteur $\mathbf{u}$ de E, nous dirons que le vecteur $\mathbf{u}$ est une fonction de la variable t, et nous noterons ce vecteur variable $\mathbf{u}(t)$.

Définition 17.4.2. *Vecteur tendant vers le vecteur nul*
Soit E un espace vectoriel euclidien. Un vecteur variable $\mathbf{u}(t)$ de E tend vers le vecteur nul, si le scalaire $\|\mathbf{u}(t)\|$ tend vers zéro quand t croît.

Définition 17.4.3. *Vecteur fonction continue d'une variable*
Le vecteur $\mathbf{u}(t)$ est une fonction continue de la variable t, si, la variable t ayant reçu un accroissement Δt, le vecteur :

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)$$

tend vers zéro quand Δt tend vers zéro.

Définition 17.4.4. *Vecteur dérivé d'un vecteur*
S'il existe un vecteur $\dot{\mathbf{u}}(t)$ *tel que,*

$$\dot{\mathbf{u}}(t) - \frac{\Delta \mathbf{u}(t)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$$

nous dirons que $\dot{\mathbf{u}}(t)$ *est le vecteur dérivé de* $\mathbf{u}(t)$ *pour la variable* t*. Nous noterons :*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{u}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{d\mathbf{u}}{dt} \end{aligned}$$

Définition 17.4.5. *Vecteur différentielle d'un vecteur*
Nous appellerons différentielle du vecteur $\mathbf{u}(t)$*, le vecteur :*

$$d\mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}} dt$$

Définition 17.4.6. *Point fonction d'une variable*
Soit $\mathcal{E}$ *un espace ponctuel euclidien, et soit* t *une variable scalaire variant dans un intervalle* (a, b)*. Si à chaque valeur de* t *nous faisons correspondre un point* M *de* $\mathcal{E}$*, nous dirons que* M *est une fonction de la variable* t*, et nous noterons cette fonction* $M(t)$*.*

Soit $M(t)$ une fonction de la variable t, et soit O un point fixe arbitraire d'un espace ponctuel euclidien $\mathcal{E}$: le vecteur $\boldsymbol{OM}$ est alors une fonction de t. Soit O' un autre point fixe arbitraire de $\mathcal{E}$, alors, $\boldsymbol{OO'}$ étant constant :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{OM}(t) &= \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'M}(t) \\ \frac{d\boldsymbol{OM}(t)}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{OO'}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{O'M}(t)}{dt} \\ \frac{d\boldsymbol{OM}(t)}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{O'M}(t)}{dt} \end{aligned}$$

Le vecteur dérivée du vecteur $\boldsymbol{OM}$ est donc indépendant du point fixe O choisi, d'où les notations suivantes :

Notation 14. *Le vecteur dérivée par rapport au temps d'un point* M *fonction de la variable* t *est noté :*

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} \equiv \dot{\boldsymbol{M}}$$

Le vecteur différentielle d'un point M *fonction de la variable* t *(ou différentielle de* M*) est noté :*

$$d\boldsymbol{M} \equiv \dot{\boldsymbol{M}} dt$$

Exemple 17.4.1. *Vecteurs de la base naturelle du système de coordonnées* (x^i)
Ils sont notés :

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x^i}$$

18

Gradient

18.1 Définition

En un point donné d'un espace ponctuel $\mathcal{E}$, soient (x^i) et $(x^{i'})$ deux systèmes de coordonnées quelconques (rectiligne ou curviligne, orthogonal ou non). Soit une fonction scalaire des coordonnées (une fonction qui prend en entrée des coordonnées et donne en sortie un scalaire). En chaque point de l'espace, cette fonction associe un scalaire, par exemple la température en chaque point d'un solide, et forme ainsi un champ de scalaires. On note cette fonction $\phi(x^i)$ ou $\phi(x^{i'})$ selon les coordonnées employées. En un point donné, la différentielle de ϕ est la même indépendamment de tout système de coordonnées :

$$\begin{aligned} d\phi(x^{i'}) &= d\phi(x^i) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x^{i'}}\, dx^{i'} &= \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\, dx^i \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\, dx^{i'} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x^{i'}} &= \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \end{aligned}$$

Les dérivées partielles de ϕ par rapport aux coordonnées se transforment comme les composantes covariantes d'un vecteur, on les note avec un indice inférieur :

$$\forall i \quad \partial_{i'}\phi = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\, \partial_i \phi \tag{73}$$

Exemple 18.1.1. *Soit (ρ, θ) et (x, y) deux systèmes de coordonnées au même point.*

$$d\phi(\rho,\theta) = d\phi(x,y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\, d\theta = \frac{\partial \phi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\, dy$$

$$\begin{cases} x = x(\rho,\theta) \\ y = y(\rho,\theta) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dx = \partial_\rho x\, d\rho + \partial_\theta x\, d\theta \\ dy = \partial_\rho y\, d\rho + \partial_\theta y\, d\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\, d\theta = \frac{\partial \phi}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial x}{\partial \theta}\, d\theta\right) + \frac{\partial \phi}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial y}{\partial \theta}\, d\theta\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial \rho}\, d\rho = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \rho}\, d\rho + \dfrac{\partial \phi}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \rho}\, d\rho \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \theta}\, d\theta = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta}\, d\theta + \dfrac{\partial \phi}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta}\, d\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial \rho} = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \dfrac{\partial \phi}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \phi}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases}$$

Une réécriture de la différentielle de ϕ

$$d\phi = \partial_i \phi \, dx^i$$

sous forme d'un produit scalaire permet de faire apparaitre un vecteur « contravariant » (vecteur exprimé en composantes contravariantes) suivant :

Définition 18.1.1. *On appelle gradient de phi, noté* $\mathbf{grad}\,\phi$, *le vecteur tel que :*

$$\boxed{d\phi \triangleq \mathbf{grad}\,\phi \cdot d\boldsymbol{M}}$$

À chaque valeur prise par la fonction ϕ en chaque point de l'espace, l'opérateur différentiel gradient associe le vecteur $\mathbf{grad}\,\phi$. Il prend en entrée un champ de scalaires ϕ et donne en sortie un champ de vecteurs $\mathbf{grad}\,\phi$. Mettons en évidence la base naturelle du système de coordonnées (x^i) :

$$d\phi = \mathbf{grad}\,\phi \cdot \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x^i}\, dx^i$$
$$\partial_i \phi dx^i = \mathbf{grad}\,\phi \cdot \mathbf{e}_i dx^i$$

Dans la base naturelle du système de coordonnées (x^i), le vecteur gradient de phi a pour coordonnées covariantes $\partial_i \phi$ telles que :

$$\boxed{\forall i \quad \partial_i \phi \triangleq \mathbf{grad}\,\phi \cdot \mathbf{e}_i}$$

Les coordonnées covariantes $\partial_i \phi$ forment le covecteur

$$\tilde{grad}\,\phi = (\partial_1 \phi, \partial_2 \phi, \ldots, \partial_n \phi)$$

où le tilde indique que les coordonnées entre parenthèses sont covariantes. Avec les relations (48) p. 101 :

$$\forall i \quad \partial^i \phi = g^{ij} \partial_i \phi$$

Les coordonnées contravariantes $\partial^i \phi$ forment le vecteur

$$\mathbf{grad}\,\phi = \left(\partial^1 \phi, \partial^2 \phi, \ldots, \partial^n \phi\right)$$

Exemple 18.1.2. *En coordonnées rectangulaires en deux dimensions, donc dans un espace vectoriel pré-euclidien* E_2, $\phi = \phi(x, y)$, *les coordonnées covariantes du vecteur gradient phi sont les suivantes :*

$$\begin{cases} \partial_x \phi = \mathbf{grad}\,\phi \cdot \mathbf{e}_x \\ \partial_y \phi = \mathbf{grad}\,\phi \cdot \mathbf{e}_y \end{cases}$$

La base naturelle associée aux coordonnées rectangulaires étant orthonormée, les coordonnées contravariantes et covariantes du vecteur gradient sont confondues et l'on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\,\phi &= \partial_x\phi\,\mathbf{e}_x + \partial_y\phi\,\mathbf{e}_y\\ &= \begin{pmatrix}\partial_x\phi\\ \partial_y\phi\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Lorsque la base n'est pas orthonormée on définit les coordonnées contravariantes du vecteur gradient en passant par le tenseur métrique.

Exemple 18.1.3. *Base oblique*
Soit (x^1, x^2) *un système de coordonnées rectangulaire de base naturelle orthonormée* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. *Soit* $\left(x^{1'}, x^{2'}\right)$ *un système de coordonnées rectilignes obliques. En s'aidant de la figure 18.1 le changement de coordonnées est le suivant :*

$$\begin{cases} x^1 = x^{1'} + x^{2'}\cos(\alpha)\\ x^2 = x^{2'}\sin(\alpha)\end{cases}$$

L'angle α *étant constant, la transformation est linéaire.*

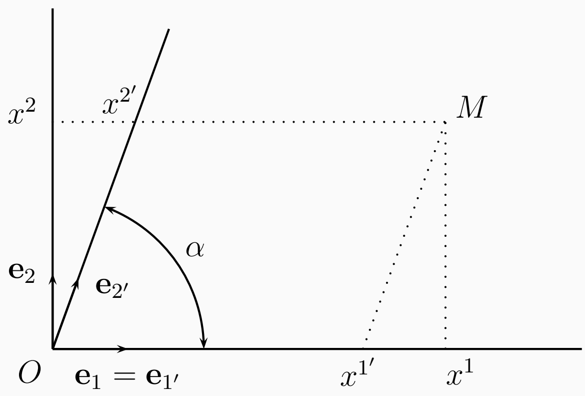


Fig. 18.1 – Base naturelle en coordonnées rectilignes obliques

Inversement :

$$\begin{cases} x^{1'} = x^1 - x^{2'}\cos(\alpha)\\ x^{2'} = \dfrac{x^2}{\sin(\alpha)}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{1'} = x^1 - \dfrac{x^2}{\tan\alpha}\\ x^{2'} = \dfrac{x^2}{\sin(\alpha)}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{OM} &= x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2\\ &= \left(x^{1'} + x^{2'}\cos(\alpha)\right)\mathbf{e}_1 + x^{2'}\sin(\alpha)\,\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

Cette relation donne les vecteurs de la base naturelle $(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'})$ *du système de coordonnées rectiligne oblique* $\left(x^{1'}, x^{2'}\right)$ *:*

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x^{1'}}\\ \mathbf{e}_{2'} = \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x^{2'}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = \mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_{2'} = \cos(\alpha)\,\mathbf{e}_1 + \sin(\alpha)\,\mathbf{e}_2\end{cases}$$

Ils sont de norme unité, $\|\mathbf{e}_{2'}\|^2 = \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$.

On a bien

$$\begin{aligned}\boldsymbol{OM} &= x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 \\ &= \left(x^{1'} + x^{2'}\cos(\alpha)\right)\mathbf{e}_1 + x^{2'}\sin(\alpha)\left(\frac{\mathbf{e}_{2'} - \cos(\alpha)\,\mathbf{e}_1}{\sin(\alpha)}\right) \\ &= x^{1'}\mathbf{e}_{1'} + x^{2'}\mathbf{e}_{2'}\end{aligned}$$

Selon la base, les coordonnées covariantes du vecteur gradient phi s'écrivent :

$$\begin{cases}\mathbf{grad}\,\phi\cdot\mathbf{e}_1 = \partial\phi/\partial x^1 \\ \mathbf{grad}\,\phi\cdot\mathbf{e}_2 = \partial\phi/\partial x^2\end{cases} \qquad \begin{cases}\mathbf{grad}\,\phi\cdot\mathbf{e}_{1'} = \partial\phi/\partial x^{1'} \\ \mathbf{grad}\,\phi\cdot\mathbf{e}_{2'} = \partial\phi/\partial x^{2'}\end{cases}$$

Par exemple pour $\phi = x^1 = x^{1'} + x^{2'}\cos(\alpha)$ *:*

$$\begin{cases}\mathbf{grad}\,\phi\cdot\mathbf{e}_1 = 1 \\ \mathbf{grad}\,\phi\cdot\mathbf{e}_2 = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\mathbf{grad}\,\phi\cdot\mathbf{e}_{1'} = 1 \\ \mathbf{grad}\,\phi\cdot\mathbf{e}_{2'} = \cos(\alpha)\end{cases}$$

Dans la base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ *les composantes contravariantes et covariantes sont confondues :*

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\,\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x^1}\,\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x^2}\,\mathbf{e}_2 \\ &= \mathbf{e}_1\end{aligned}$$

Dans la base primée $(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'})$ *:*

$$\mathbf{grad}\,\phi = \mathbf{e}_{1'}$$

Exemple 18.1.4. *Soit* $\phi = \phi(\rho,\theta)$ *une fonction scalaire en coordonnées polaires. Dans la base naturelle polaire* $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$ *les coordonnées covariantes du vecteur gradient phi s'écrivent :*

$$\begin{cases}\mathbf{grad}\,\phi\cdot\mathbf{e}_\rho = \partial_\rho\phi \\ \mathbf{grad}\,\phi\cdot\mathbf{e}_\theta = \partial_\theta\phi\end{cases}$$

Dans la base naturelle polaire, les composantes covariantes forment le covecteur :

$$\tilde{grad}\,\phi = (\partial_\rho\phi, \partial_\theta\phi)$$

Avec les relations (48) *p. 101 :*

$$\mathbf{grad}\,\phi = g^{\rho\rho}\partial_\rho\phi\,\mathbf{e}_\rho + g^{\rho\theta}\partial_\theta\phi\,\mathbf{e}_\rho + g^{\theta\rho}\partial_\rho\phi\,\mathbf{e}_\theta + g^{\theta\theta}\partial_\theta\phi\,\mathbf{e}_\theta$$

Les coordonnées polaires étant orthogonales, les termes croisés sont nuls :

$$\mathbf{grad}\,\phi = g^{\rho\rho}\partial_\rho\phi\,\mathbf{e}_\rho + g^{\theta\theta}\partial_\theta\phi\,\mathbf{e}_\theta$$

Avec l'inverse du tenseur métrique en polaire (53) *p. 102, nous trouvons les coordonnées contravariantes du vecteur gradient phi :*

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\,\phi &= \partial_\rho\phi\,\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho^2}\,\partial_\theta\phi\,\mathbf{e}_\theta \\ &= \begin{pmatrix}\partial_\rho\phi \\ \partial_\theta\phi/\rho^2\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{74}$$

Exemple 18.1.5. *Dans un espace vectoriel pré-euclidien, soit la courbe* $\mathscr{C}(\lambda)$ *d'équations paramétriques* $x^i = x^i(\lambda)$*, et soit* $\phi(x^i)$ *une fonction scalaire le long de* $\mathscr{C}$*. Sa dérivée a pour expression :*

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{d\lambda} &= \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\lambda}\\ &= \partial_i\phi u^i\end{aligned}$$

$u^i = dx^i/d\lambda$ *est un vecteur partout tangent à* $\mathscr{C}$*. Il se transforme suivant les relations :*

$$\begin{aligned}\forall i \quad dx^{i'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}dx^i\\ \forall i \quad \frac{dx^{i'}}{d\lambda} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\lambda}\\ \forall i \quad u^{i'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}u^i\end{aligned}$$

u^i *est contravariant.* $\partial_i\phi$ *est le gradient de la fonction* ϕ*, il est covariant d'après* (73) *p. 151.* $d\phi/d\lambda$ *est donc invariant par changement de coordonnées :*

$$\begin{aligned}\frac{d\phi(x^i)}{d\lambda} &= \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\lambda}\\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{dx^{i'}}{d\lambda}\\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x^{i'}}\frac{dx^{i'}}{d\lambda}\\ &= \frac{d\phi(x^{i'})}{d\lambda}\end{aligned}$$

En effet $d\phi/d\lambda$ *est le rapport de deux invariants. Le produit du covecteur* $\partial_i\phi$ *par le vecteur* u^i *est appelé multiplication contractée.*

Exemple 18.1.6. *Prenons un exemple en relativité restreinte. Dans cette branche de la physique, l'espace-temps est un espace mathématique à quatre dimensions. Les vecteurs ayant tous quatre coordonnées sont appelés quadrivecteurs. En prenant un temps réel, le quadrivecteur vitesse d'une particule s'écrit :*

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix}U^t\\U^x\\U^y\\U^z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}dt/d\tau\\dx/d\tau\\dy/d\tau\\dz/d\tau\end{pmatrix}$$

où τ *est le temps propre de la particule, et où les composantes sont contravariantes. Soit* $\phi(t,x,y,z)$ *une fonction scalaire, sa différentielle s'écrit :*

$$d\phi(t,x,y,z) = \frac{\partial\phi}{\partial t}dt + \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

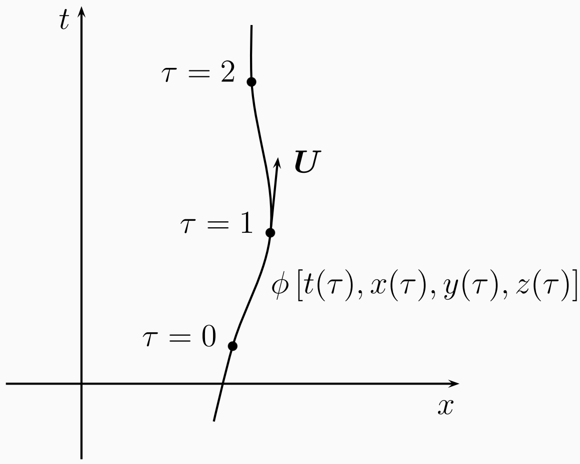


FIG. 18.2 – Champ de scalaires le long d'une ligne d'univers

Si l'on prend un point sur la ligne d'univers de la particule (Fig. 18.2), les coordonnées en entrée de ϕ sont toutes des fonctions du temps propre τ, et ϕ qui est une fonction explicite des coordonnées, est aussi une fonction implicite du temps propre :

$$\begin{aligned}\frac{d\phi\,[t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau)]}{d\tau} &= \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{d\tau} \\ &= \partial_t\phi\, U^t + \partial_x\phi\, U^x + \partial_y\phi\, U^y + \partial_z\phi\, U^z\end{aligned}$$

On peut réécrire cette égalité sous forme matricielle :

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \begin{pmatrix}\partial_t\phi & \partial_x\phi & \partial_y\phi & \partial_z\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U^t \\ U^x \\ U^y \\ U^z\end{pmatrix}$$

$\partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi$ et $\partial_z\phi$ étant des composantes covariantes, nous définissons le covecteur gradient phi par :

$$\tilde{d}\phi = \begin{pmatrix}\partial_t\phi & \partial_x\phi & \partial_y\phi & \partial_z\phi\end{pmatrix}$$

Pour chaque évènement (t, x, y, z) de la ligne d'univers de la particule, $\phi(t, x, y, z)$ étant un scalaire, il en va de même de $d\phi/d\tau$, si bien que la multiplication contractée du covecteur gradient par le quadrivecteur vitesse donne un champ de scalaires. Le covecteur gradient est donc une forme, une application qui à un vecteur fait correspondre un scalaire.

Contrairement au produit scalaire, la contraction ne fait pas intervenir le tenseur métrique. En effet, l'un des deux membres est déjà un covecteur.

EXEMPLE 18.1.7. *D'après l'exemple 17.3 p. 146, en prenant une métrique de signature $(+ - - -)$ et d'après les relations (43) p. 99, le covecteur quadrivitesse est donné par*

$g_{ij}u^j = u_i$:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}dt/d\tau\\ dx/d\tau\\ dy/d\tau\\ dz/d\tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}dt/d\tau\\ -dx/d\tau\\ -dy/d\tau\\ -dz/d\tau\end{pmatrix}$$

La notation du terme de droite sous forme de matrice colonne semble indiquer que les composantes sont contravariantes alors qu'elles sont covariantes. Seul le signe négatif permet la distinction. On note le covecteur en ligne,

$$\tilde{u} = (dt/d\tau, -dx/d\tau, -dy/d\tau, -dz/d\tau)$$

où les virgules entre les composantes indiquent qu'il ne s'agit pas d'un tableau mais d'un ensemble ordonné de valeurs. On note aussi les composantes du covecteur explicitement avec un indice en bas :

$$u_1 = dt/d\tau$$
$$u_2 = -dx/d\tau$$
$$u_3 = -dy/d\tau$$
$$u_4 = -dz/d\tau$$

D'après les relations (48) p. 101, le vecteur adjoint (ou associé, ou réciproque) du covecteur gradient de ϕ, c'est-à-dire le vecteur gradient de ϕ, s'écrit $g^{ij}\partial_i\phi = \partial^j\phi$. Or $g^{ij} = g_{ij}$ d'après l'exercice 61 p. 106 :

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\partial_t\phi\\ \partial_x\phi\\ \partial_y\phi\\ \partial_z\phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_t\phi\\ -\partial_x\phi\\ -\partial_y\phi\\ -\partial_z\phi\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{grad}\,\phi = \begin{pmatrix}\partial_t\phi\\ -\partial_x\phi\\ -\partial_y\phi\\ -\partial_z\phi\end{pmatrix}$$

On voit que la notation n'est pas parfaite puisque l'indice de dérivation en bas semble indiquer une covariance des composantes.

Notation 15. *On peut trouver la notation suivante,*

$$\mathbf{u}^T = \begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}$$

pour le covecteur adjoint au vecteur $\mathbf{u}$. *Or le covecteur n'est la transposée du vecteur que dans un espace vectoriel euclidien car le tenseur métrique est alors la matrice identité. En effet, l'exemple 17.3 p. 146 montre que dans l'espace-temps pseudo-euclidien de la relativité restreinte un signe négatif apparait.*

18.2 Représentation

Il s'agit de représenter (de symboliser) un covecteur gradient en un point donné de l'espace, en ayant à l'esprit que le covecteur gradient est l'archétype des covecteurs. Sa représentation servira pour tous les covecteurs. On représente de petites tangentes aux courbes de niveau (non représentées) localement autour du point (Fig. 18.3).

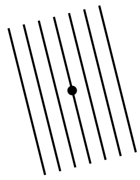


FIG. 18.3 – Représentation d'un covecteur en un point

Plus les lignes parallèles sont rapprochées et plus la norme du covecteur est grande (plus le gradient est fort). La contraction d'un covecteur et d'un vecteur est le nombre de segments de droite traversés par le vecteur en ce point, ici environ $3,4$ (Fig. 18.4).

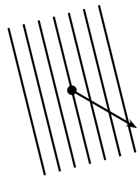


FIG. 18.4 – Contraction d'un covecteur et d'un vecteur

18.3 Base réciproque de la base naturelle

Soit (x^i) un système de coordonnées curvilignes d'un espace ponctuel euclidien $\mathcal{E}_n$, et soit M un point de cet espace. Soit $(\mathbf{e}_i)$ une base naturelle de l'espace vectoriel euclidien E_n associé à $\mathcal{E}_n$. Montrons que la base formée par les vecteurs $\mathbf{grad}\ x^j$ est la base réciproque de la base $(\mathbf{e}_i)$.

Prenons la définition 18.1.1 p. 152 du vecteur gradient :

$$\mathbf{grad}\,\phi \cdot d\boldsymbol{M} = d\phi$$

Posons $\phi = x^1$:

$$\begin{aligned} dx^1 &= \mathbf{grad}\ x^1 \cdot d\boldsymbol{M} \\ &= \mathbf{grad}\ x^1 \cdot \left(\mathbf{e}_1\, dx^1 + \mathbf{e}_2\, dx^2 + \cdots + \mathbf{e}_n\, dx^n\right) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \mathbf{grad}\ x^1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1 \\ \mathbf{grad}\ x^1 \cdot \mathbf{e}_k = 0 \qquad \forall k = 2, \ldots, n \end{cases}$$

De même pour $\mathbf{grad}\ x^2, \ldots, \mathbf{grad}\ x^n$. Par conséquent,

$$\boxed{\forall i, j \quad \mathbf{grad}\ x^j \cdot \mathbf{e}_i = \delta_i^j}$$

qui montre que ces bases sont réciproques. En général, les vecteurs de base de la base réciproque de la base naturelle ne sont pas de norme unité, comme on peut le constater dans l'exemple 18.1.3 p. 153.

Montrons que les vecteurs de base de la base réciproque sont perpendiculaires aux hypersurfaces de coordonnées. Dans le système de coordonnées (x^i), considérons l'hypersurface de coordonnée $x^1 = c^{ste}$, sur laquelle la différentielle de x^1 est nulle :

$$\begin{aligned} dx^1 &= \mathbf{grad}\ x^1 \cdot d\boldsymbol{M} \\ &= 0 \end{aligned}$$

grad x^1 est donc perpendiculaire à $d\boldsymbol{M}$, lui même tangent en M à l'hypersurface $x^1 = c^{ste}$. Par conséquent **grad** x^1 est perpendiculaire en M à l'hypersurface $x^1 = c^{ste}$.

EXEMPLE 18.3.1. *En coordonnées polaires*

(1) En utilisant l'expression du gradient en coordonnées polaires (74) *p.* *154* *:*

$$\begin{cases} \mathbf{e}^\rho = \mathbf{grad}\ \rho \\ \mathbf{e}^\theta = \mathbf{grad}\ \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}^\rho = \partial_\rho \rho\, \mathbf{e}_\rho + \dfrac{1}{\rho^2}\, \partial_\theta \rho\, \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}^\theta = \partial_\rho \theta\, \mathbf{e}_\rho + \dfrac{1}{\rho^2}\, \partial_\theta \theta\, \mathbf{e}_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}^\rho = \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}^\theta = \dfrac{\mathbf{e}_\theta}{\rho^2} \end{cases}$$

(2) En utilisant l'expression du gradien en coordonnées rectangulaires :

$$\begin{cases} \mathbf{e}^\rho = \mathbf{grad}\ \rho \\ \mathbf{e}^\theta = \mathbf{grad}\ \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}^\rho = \rho_{,x}\mathbf{e}_x + \rho_{,y}\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}^\theta = \theta_{,x}\mathbf{e}_x + \theta_{,y}\mathbf{e}_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}^\rho = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathbf{e}_x + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}^\theta = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,\mathbf{e}_x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{e}_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}^\rho = \cos(\theta)\,\mathbf{e}_x + \sin(\theta)\,\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}^\theta = -\dfrac{1}{\rho}\sin(\theta)\,\mathbf{e}_x + \dfrac{1}{\rho}\cos(\theta)\,\mathbf{e}_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}^\rho = \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}^\theta = \dfrac{\mathbf{e}_\theta}{\rho^2} \end{cases}$$

19 Transformation de coordonnées

19.1 Matrice jacobienne et jacobien

Soit T la transformation de l'ancien système de coordonnées (x^i) vers le nouveau système de coordonnées $\left(x^{j'}\right)$, noté $(x^i) \to \left(x^{j'}\right)$:

$$T \quad : \qquad \forall j = 1, \ldots, n \quad x^{j'} = x^{j'}\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \tag{75}$$

Si cette transformation est *bijective*, c'est-à-dire si à tout vecteur de son domaine de définition elle fait correspondre un unique vecteur de son ensemble d'arrivée, alors $\left(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}\right)$ est aussi un système de coordonnées.

Les différentielles des nouvelles coordonnées en fonction des anciennes s'écrivent :

$$\begin{cases} dx^{1'} = \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} dx^1 + \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} dx^2 + \cdots + \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^n} dx^n \\ dx^{2'} = \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} dx^1 + \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} dx^2 + \cdots + \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^n} dx^n \\ \quad \vdots \\ dx^{n'} = \dfrac{\partial x^{n'}}{\partial x^1} dx^1 + \dfrac{\partial x^{n'}}{\partial x^2} dx^2 + \cdots + \dfrac{\partial x^{n'}}{\partial x^n} dx^n \end{cases}$$

Définition 19.1.1. *Matrice jacobienne d'une transformation*
La matrice carrée $n \times n$ des dérivées partielles premières des nouvelles coordonnées par rapport aux anciennes,

$$[J] \triangleq \left[\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\right]_{nn} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

est appelée matrice jacobienne de la transformation T.

En notation indicielle ligne-colonne :

$$\forall j \quad dx^{j'} = \sum_i J_{j'i} dx^i$$

où les $J_{j'i}$ sont les éléments de la matrice $[J]$, le prime sur l'indice indiquant la nouvelle base. En utilisant la convention de sommation sur les indices répétés en haut et en bas :

$$\begin{aligned}\forall j \quad dx^{j'} &= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\, dx^i \\ &= J_i^{j'}\, dx^i\end{aligned}$$

Lorsque l'on utilise la convention de sommation il n'y a plus de notation indicielle ligne-colonne car l'indice sur lequel on somme est toujours l'indice de colonne. Il dépend du terme qui suit.

Sous forme matricielle cette dernière égalité s'écrit :

$$\begin{pmatrix} dx'^1 \\ \vdots \\ dx'^n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^n \end{pmatrix}$$

En prenant le déterminant de chaque membre de l'égalité :

$$\begin{gathered} dx'^1 \ldots dx'^n = \det[J] dx^1 \ldots dx^n \\ \prod_{i=1}^{n} dx'^i = \det[J] \prod_{i=1}^{n} dx^i \end{gathered}$$

Notation 16. *$d\Omega$ est le produit des différentielles des coordonnées, il se confond avec l'hypervolume élémentaire de l'espace en coordonnées rectangulaires.*

$$d\Omega' = \det[J] d\Omega \tag{76}$$

Notation 17. *$dx'^1 \ldots dx'^n$ est aussi noté $d^n x$.*

Définition 19.1.2. *Jacobien d'une transformation*
Le déterminant

$$\begin{aligned} J &\triangleq \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^n} \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon_{i'j'\ldots l'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^1} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^2} \cdots \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^n} \\ &= \varepsilon^{ij\ldots l} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^j} \cdots \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^l} \end{aligned}$$

est appelé jacobien de la transformation T.

Définition 19.1.3. *Transformation de coordonnées*
Soit $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ *un système de coordonnées de l'espace ponctuel* $\mathcal{E}_n$*. L'ensemble des* n *équations* (75) *p. 161 est une transformation de coordonnées ou un changement de coordonnées vers le nouveau système de coordonnées* $\left(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}\right)$ *de l'espace ponctuel* $\mathcal{E}_n$*, seulement si le jacobien de la transformation est non nul :*

$$J \neq 0$$

En effet, T *est bijective ssi son jacobien est non nul. Pour être une transformation de coordonnées, la transformation doit de plus être de classe* C^2*.*

Le jacobien étant non nul, nous pouvons inverser la transformation

$$T^{-1} \quad : \quad \forall i = 1, \ldots, n \qquad x^i = x^i\left(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}\right)$$

de matrice jacobienne :

$$[K] \triangleq \left[\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\right]_{nn} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x^{n'}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial x^{1'}} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial x^{n'}} \end{bmatrix} \tag{77}$$

En notation indicielle :

$$\forall i, j \quad K^i_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}$$

À partir des relations (3) p. 8,

$$\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} = \delta^j_i \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial x^j}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} = \delta^j_i$$

qui s'écrit sous forme matricielle :

$$[J][K] = [K][J] = I$$

où I est la matrice identité. La matrice $[K]$ est aussi notée $[J]^{-1}$. La matrice jacobienne de la transformation inverse est égale à l'inverse de la matrice jacobienne de la transformation.

Les matrices jacobiennes étant inverses l'une de l'autre, il s'en suit que les jacobiens sont également inverses l'un de l'autre :

$$K = 1/J$$

Si la transformation a lieu entre repères rectilignes alors les $\frac{\partial x}{\partial y}$ sont tous constants et le jacobien est constant. En repères curvilignes le jacobien est fonction du point.

Exemple 19.1.1. *La matrice jacobienne de la transformation des coordonnées polaires en rectangulaires* $(\rho, \theta) \to (x, y)$ *s'écrit :*

$$\begin{aligned} [J] \triangleq \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} &\triangleq \begin{bmatrix} \partial_\rho x & \partial_\theta x \\ \partial_\rho y & \partial_\theta y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Elle a pour déterminant :

$$\begin{aligned} J &= \rho\cos^2(\theta) + \rho\sin^2(\theta) \\ &= \rho. \end{aligned}$$

Cette transformation est bijective pour $J \neq 0$, donc pour $\rho \neq 0$, c'est-à-dire pour le plan privé du point origine.

La matrice jacobienne de la transformation inverse, des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires $(x, y) \to (\rho, \theta)$, s'écrit :

$$\begin{aligned}
[K] &\triangleq \frac{(\partial\rho, \theta)}{(\partial x, y)} \triangleq \begin{bmatrix} \partial_x \rho & \partial_y \rho \\ \partial_x \theta & \partial_y \theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x\left(x^2+y^2\right)^{-1/2} & y\left(x^2+y^2\right)^{-1/2} \\ -y\left(x^2+y^2\right)^{-1} & x\left(x^2+y^2\right)^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{\sin(\theta)}{\rho} & \frac{\cos(\theta)}{\rho} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{78}$$

Elle a pour déterminant :

$$\begin{aligned}
K &= \frac{\cos^2(\theta)}{\rho} + \frac{\sin^2(\theta)}{\rho} \\
&= \frac{1}{\rho}
\end{aligned}$$

Exemple 19.1.2. *Même démonstration que l'exemple 12.3.1 p. 100 en passant en coordonnées rectangulaires.*

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}' &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5\rho \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3/5\cos(\theta) - 4/5\sin(\theta) \\ 3/5\sin(\theta) + 4/5\cos(\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|^2 &= \delta_{ij}u^iu^j = \left(3/5\cos(\theta) - 4/5\sin(\theta)\right)^2 + \left(3/5\sin(\theta) + 4/5\cos(\theta)\right)^2 \\
&= \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}' &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5\rho \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4/5\cos(\theta) - 3/5\sin(\theta) \\ -4/5\sin(\theta) + 3/5\cos(\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}\|^2 &= \delta_{ij}v^iv^j = \left(-4/5\cos(\theta) - 3/5\sin(\theta)\right)^2 + \left(-4/5\sin(\theta) + 3/5\cos(\theta)\right)^2 \\
&= \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= g_{ij}u^iv^j = \delta_{ij}u^iv^j \\
&= \left(\tfrac{3}{5}\cos(\theta) - \tfrac{4}{5}\sin(\theta)\right)\left(\tfrac{-4}{5}\cos(\theta) - \tfrac{3}{5}\sin(\theta)\right) \\
&\qquad + \left(\tfrac{3}{5}\sin(\theta) + \tfrac{4}{5}\cos(\theta)\right)\left(\tfrac{-4}{5}\sin(\theta) + \tfrac{3}{5}\cos(\theta)\right) \\
&= -\tfrac{12}{25} + \tfrac{12}{25} = 0
\end{aligned}$$

Exemple 19.1.3. *Passer dans l'espace-temps de Poincaré-Minkowski revient à effectuer la transformation suivante :*

$$x^1 = x$$
$$x^2 = y$$
$$x^3 = z$$
$$x^4 = it$$

Le jacobien de cette transformation a pour expression :

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{vmatrix} = i$$

19.2 Matrice changement de base

Toute transformation de coordonnées induit un changement de base naturelle, donc une transformation des vecteurs de base. Lors d'une transformation de coordonnées, les vecteurs de base sont les seuls à se transformer, les autres vecteurs restent identiques à eux mêmes lors de la transformation.

Exemple 19.2.1. *Le vecteur vitesse* $\mathbf{v}$ *d'une particule ne dépend pas du système de coordonnées dans lequel on l'exprime.*

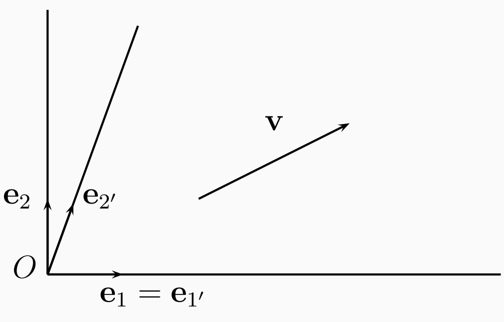


Fig. 19.1 – Changement de base

Dans le cas où ce vecteur est unitaire vertical dirigé vers le haut, il ne doit pas être confondu avec le vecteur de base $\mathbf{e}_2$ *qui lui subira un vrai changement pour devenir* $\mathbf{e}_{2'}$*. Lors du changement de base les composantes du vecteur vitesse se transforment de manière à ce que le vecteur reste identique à lui-même.*

Définition 19.2.1. *Matrice changement de base*
Soient $(\mathbf{e}_i)$ *et* $(\mathbf{e}_{j'})$ *deux bases d'un espace vectoriel* E_n *où par convention les indices de la nouvelle base sont primées, telles que :*

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = A^1_{1'}\,\mathbf{e}_1 + A^2_{1'}\,\mathbf{e}_2 + \cdots + A^n_{1'}\,\mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_{2'} = A^1_{2'}\,\mathbf{e}_1 + A^2_{2'}\,\mathbf{e}_2 + \cdots + A^n_{2'}\,\mathbf{e}_n \\ \quad\vdots \\ \mathbf{e}_{n'} = A^1_{n'}\,\mathbf{e}_1 + A^2_{n'}\,\mathbf{e}_2 + \cdots + A^n_{n'}\,\mathbf{e}_n \end{cases}$$

Nous appelons A *la matrice changement de base* $(\mathbf{e}_i) \to (\mathbf{e}_{j'})$

$$A \triangleq \begin{bmatrix} A^1_{1'} & \dots & A^n_{1'} \\ \vdots & & \vdots \\ A^1_{n'} & \dots & A^n_{n'} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_{1'})_{\mathbf{e}_i} \\ (\mathbf{e}_{2'})_{\mathbf{e}_i} \\ \vdots \\ (\mathbf{e}_{n'})_{\mathbf{e}_i} \end{bmatrix}$$

où $(\mathbf{e}_{j'})_{\mathbf{e}_i}$ *est le vecteur* $\mathbf{e}_{j'}$ *exprimé dans la base* $(\mathbf{e}_i)$*. Nous avons*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n'} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix} \tag{79}$$

où les éléments des vecteurs sont eux-mêmes des vecteurs. En utilisant la convention de sommation sur les indices répétés en haut et en bas :

$$\forall j \quad \mathbf{e}_{j'} = A^i_{j'}\mathbf{e}_i \tag{80}$$

Remarque 27. *La matrice jacobienne et la matrice changement de base ne sont pas des tenseurs, elles ne se transforment pas lors d'un changement de base. Leurs indices ne sont pas des indices de variance, nous pouvons les placer en haut ou en bas pour utiliser la convention de sommation.*

Définition 19.2.2. *Matrice de passage*
On appelle matrice de passage la matrice :

$$P \triangleq \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_{1'})_{\mathbf{e}_i} & (\mathbf{e}_{2'})_{\mathbf{e}_i} & \dots & (\mathbf{e}_{n'})_{\mathbf{e}_i} \end{bmatrix}$$

où $(\mathbf{e}_{j'})_{\mathbf{e}_i}$ *est le vecteur* $\mathbf{e}_{j'}$ *exprimé dans la base* $(\mathbf{e}_i)$*. C'est la transposée de* A *:*

$$P \triangleq A^T = \begin{bmatrix} A^{1'}_1 & \dots & A^{n'}_1 \\ \vdots & & \vdots \\ A^{1'}_n & \dots & A^{n'}_n \end{bmatrix}$$

La matrice de passage donne la transformation des coordonnées des vecteurs autres que les vecteurs de bases, de la nouvelle base vers l'ancienne base. Par exemple pour le vecteur vitesse en deux dimensions :

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \mathbf{v'} \\
\mathrm{v}^1\mathbf{e}_1 + \mathrm{v}^2\mathbf{e}_2 &= \mathrm{v}^{1'}\mathbf{e}_{1'} + \mathrm{v}^{2'}\mathbf{e}_{2'} \\
&= \mathrm{v}^{1'}(\mathrm{A}^1_{1'}\mathbf{e}_1 + \mathrm{A}^2_{1'}\mathbf{e}_2) + \mathrm{v}^{2'}(\mathrm{A}^1_{2'}\mathbf{e}_1 + \mathrm{A}^2_{2'}\mathbf{e}_2) \\
&= \left(\mathrm{v}^{1'}\mathrm{A}^1_{1'} + \mathrm{v}^{2'}\mathrm{A}^1_{2'}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\mathrm{v}^{1'}\mathrm{A}^2_{1'} + \mathrm{v}^{2'}\mathrm{A}^2_{2'}\right)\mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\mathrm{v}^1 \\ \mathrm{v}^2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A^1_{1'} & A^1_{2'} \\ A^2_{1'} & A^2_{2'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{v}^{1'} \\ \mathrm{v}^{2'}\end{pmatrix} \\
&= A^T\begin{pmatrix}\mathrm{v}^{1'} \\ \mathrm{v}^{2'}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le changement de base inverse s'écrit :

$$\begin{cases}
\mathbf{e}_1 = B_1^{1'}\,\mathbf{e}_{1'} + B_1^{2'}\,\mathbf{e}_{2'} + \cdots + B_1^{n'}\,\mathbf{e}_{n'} \\
\mathbf{e}_2 = B_2^{1'}\,\mathbf{e}_{1'} + B_2^{2'}\,\mathbf{e}_{2'} + \cdots + B_2^{n'}\,\mathbf{e}_{n'} \\
\quad\vdots \\
\mathbf{e}_n = B_n^{1'}\,\mathbf{e}_{1'} + B_n^{2'}\,\mathbf{e}_{2'} + \cdots + B_n^{n'}\,\mathbf{e}_{n'}
\end{cases}$$

En notation matricielle,

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{1'} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n'}\end{pmatrix}$$

et en notation indicielle,

$$\forall i \quad \mathbf{e}_i = B_i^{j'}\mathbf{e}_{j'} \tag{81}$$

Les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{1'} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n'}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n\end{pmatrix} = AB\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{1'} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n'}\end{pmatrix}$$

D'où :

$$AB = I$$

Faisons la même démonstration en notation indicielle. En changeant les indices muets,

$$\begin{cases}
\forall j \quad \mathbf{e}_{j'} = A^i_{j'}\mathbf{e}_i \\
\forall i \quad \mathbf{e}_i = B_i^{k'}\mathbf{e}_{k'}
\end{cases}$$

d'une part,

$$\begin{aligned}
\forall j \quad \mathbf{e}_{j'} &= A^i_{j'}\mathbf{e}_i \\
&= A^i_{j'}B_i^{k'}\mathbf{e}_{k'} \\
&= B_i^{k'}A^i_{j'}\mathbf{e}_{k'}
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\forall j \quad \mathbf{e}_{j'} = \delta_{j'}^{k'}\mathbf{e}_{k'}$$

Par conséquent :

$$\forall k, j \quad B_i^{k'} A_{j'}^i = \delta_{j'}^{k'} \tag{82}$$

19.3 Transformation de la base naturelle

En physique la transformation des vecteurs de base est due à un changement de coordonnées ou à un déplacement de l'origine de la base dans un système de coordonnées curviligne. Nous nous placerons toujours dans la base naturelle du système de coordonnées.

$$\begin{aligned} \forall j \quad \mathbf{e}_{j'} &= \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x^{j'}} \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \end{aligned}$$

$$\forall j \quad \mathbf{e}_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \mathbf{e}_i \tag{83}$$

Cette relation n'est valable que pour un changement de base naturelle à base naturelle. Cette relation et les relations (80) p. 166 donnent l'expression des éléments de la matrice changement de base entre deux bases naturelles :

$$\forall i, j \quad A_{j'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \mathbf{e}_1 + \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \mathbf{e}_2 + \cdots + \dfrac{\partial x^n}{\partial x^{1'}} \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_{2'} = \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} \mathbf{e}_1 + \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \mathbf{e}_2 + \cdots + \dfrac{\partial x^n}{\partial x^{2'}} \mathbf{e}_n \\ \quad \vdots \\ \mathbf{e}_{n'} = \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{n'}} \mathbf{e}_1 + \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{n'}} \mathbf{e}_2 + \cdots + \dfrac{\partial x^n}{\partial x^{n'}} \mathbf{e}_n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial x^{1'}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{n'}} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial x^{n'}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$$

C'est la transposée de l'inverse de la matrice jacobienne (77) p. 163 :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n'} \end{pmatrix} = K^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$$

Cette relation et la relation (79) p. 166 montrent que pour des bases naturelles les matrices A et K sont transposées l'une de l'autre :

$$A = K^T$$

Les transformations inverses s'écrivent :

$$\begin{aligned} \forall i \quad \mathbf{e}_i &= \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \end{aligned}$$

$$\forall i \quad \mathbf{e}_i = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\,\mathbf{e}_{j'} \tag{84}$$

Les relations (81) p. 167 donnent l'expression des éléments de la matrice B en bases naturelles :

$$\forall i,j \quad B_i^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}$$

Nous avons aussi

$$B = J^T$$

Exemple 19.3.1. *Rotation d'une base*

Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ *une base orthonormée du plan. Une rotation d'angle* α *du système de coordonnées transforme cette base en une nouvelle base orthonormée du plan,* $(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'})$ *:.*

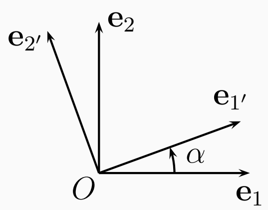


Fig. 19.2 – Rotation d'une base

Déterminons la nouvelle base en fonction de l'ancienne :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = \cos(\alpha)\,\mathbf{e}_1 + \sin(\alpha)\,\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_{2'} = -\sin(\alpha)\,\mathbf{e}_1 + \cos(\alpha)\,\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \\ &= [A] \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit les coefficients $A^i_{j'} = \partial x^i / \partial x^{j'}$ *:*

$$A^1_{1'} = \cos(\alpha) \qquad A^2_{1'} = \sin(\alpha) \qquad A^1_{2'} = -\sin(\alpha) \qquad A^2_{2'} = \cos(\alpha)$$

Le determinant de $[A]$ *vaut l'unité :*

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} \\ &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \end{aligned}$$

Déterminons l'ancienne base en fonction de la nouvelle. On trouve directement :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \cos(\alpha)\,\mathbf{e}_{1'} - \sin(\alpha)\,\mathbf{e}_{2'} \\ \mathbf{e}_2 = \sin(\alpha)\,\mathbf{e}_{1'} + \cos(\alpha)\,\mathbf{e}_{2'} \end{cases}$$

On peut aussi multiplier par cosinus et sinus :

$$\begin{cases} \cos(\alpha)\,\mathbf{e}_{1'} = \cos^2\alpha\,\mathbf{e}_1 + \cos(\alpha)\sin(\alpha)\,\mathbf{e}_2 \\ \sin(\alpha)\,\mathbf{e}_{2'} = -\sin^2\alpha\,\mathbf{e}_1 + \sin(\alpha)\cos(\alpha)\,\mathbf{e}_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{e}_{1'} = \cos(\alpha)\,\mathbf{e}_1 - \sin(\alpha)\,\mathbf{e}_2$$

$$\begin{cases} \sin(\alpha)\,\mathbf{e}_{1'} = \sin(\alpha)\cos(\alpha)\,\mathbf{e}_1 + \sin^2\alpha\,\mathbf{e}_2 \\ \cos(\alpha)\,\mathbf{e}_{2'} = \cos(\alpha)\sin(\alpha)\,\mathbf{e}_1 + \cos^2\alpha\,\mathbf{e}_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{2'} = \sin(\alpha)\,\mathbf{e}_1 + \cos(\alpha)\,\mathbf{e}_2$$

ou calculer l'inverse de $[A]$. Puisque le déterminant vaut l'unité, l'inverse est égale à sa transposée :

$$[B] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Le déterminant étant égal à un, on en déduit les coefficients $B_i^{j'} = \partial x^{j'}/\partial x^i$:

$$B_1^{1'} = \cos(\alpha) \qquad B_1^{2'} = -\sin(\alpha) \qquad B_2^{1'} = \sin(\alpha) \qquad B_2^{2'} = \cos(\alpha)$$

19.4 Changement de repère

Soient $(O, \mathbf{e}_i)$ et $(O', \mathbf{e}_{j'})$ deux repères de l'espace ponctuel. Les bases étant reliées par les relations (83) et (84) p. 169, quelles sont les relations entre les coordonnées d'un point M exprimées dans chacun de ces repères ?

Nous avons,

$$\begin{cases} \boldsymbol{OO'} = \alpha^i \mathbf{e}_i \\ \boldsymbol{O'O} = \alpha^{j'} \mathbf{e}_{j'} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \boldsymbol{OM} = x^i \mathbf{e}_i \\ \boldsymbol{O'M} = x^{j'} \mathbf{e}_{j'} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{OM} &= \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'M} \\ x^i \mathbf{e}_i &= \alpha^i \mathbf{e}_i + x^{j'} \mathbf{e}_{j'} \\ &= \alpha^i \mathbf{e}_i + x^{j'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \mathbf{e}_i \\ &= \left(\alpha^i + x^{j'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \right) \mathbf{e}_i \\ \forall i \quad x^i &= \alpha^i + x^{j'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \end{aligned}$$

Par symétrie :

$$\forall j \quad x^{j'} = \alpha^{j'} + x^i \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}$$

19.5 Transformation des composantes d'un vecteur

19.5.1 Transformation des composantes contravariantes

Les vecteurs ont une signification absolue indépendante de la base dans laquelle on les exprime, mais les nombres (les composantes) qui les décrivent dépendent de la base utilisée :

$$u^{j'} \mathbf{e}_{j'} = u^i \mathbf{e}_i$$

À partir du changement de base naturelle (84) p. 169 :

$$u^{j'}\mathbf{e}_{j'} = u^i \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\mathbf{e}_{j'}$$

Les composantes contravariantes se transforment par changement de base naturelle selon les relations :

$$\forall j \quad u^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} u^i \tag{85}$$

Cette transformation est linéaire et homogène. Nous avons suivi la notation 2 p. 5 du prime sur l'indice, bien qu'il ne s'agisse pas de l'indice j' mais de la j^e composante du vecteur dans la base primée.

$$\begin{cases} u^{1'} = \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} u^1 + \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} u^2 + \cdots + \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^n} u^n \\ u^{2'} = \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} u^1 + \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} u^2 + \cdots + \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^n} u^n \\ \quad \vdots \\ u^{n'} = \dfrac{\partial x^{n'}}{\partial x^1} u^1 + \dfrac{\partial x^{n'}}{\partial x^n} u^n + \cdots + \dfrac{\partial x^{n'}}{\partial x^n} u^n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u^{1'} \\ \vdots \\ u^{n'} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \\ &= J \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En composantes contravariantes dans la base naturelle :

$$\mathbf{u}' = J\mathbf{u} \tag{86}$$

Par changement de base naturelle, les composantes contravariantes se transforment comme les différentielles des coordonnées, par la matrice jacobienne J, et de façon « contraire » (transposée de la matrice inverse de A) aux vecteurs de base (79) p. 166. À partir du changement de base naturelle (83) p. 168 :

$$\begin{aligned} u^i\mathbf{e}_i &= u^{j'}\mathbf{e}_{j'} \\ &= u^{j'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\mathbf{e}_i \end{aligned}$$

$$\forall i \quad u^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} u^{j'} \tag{87}$$

En notation matricielle, en composantes contravariantes :

$$\mathbf{u} = K\mathbf{u}'$$

Remarque 28. $\mathbf{u}'$ *n'est autre que* $\mathbf{u}$ *(exprimé dans la base primée). Le prime désigne ici le même objet. Par contre* $\mathbf{e}'_i$ *(noté* $\mathbf{e}_{i'}$*) n'est pas* $\mathbf{e}_i$*. Le prime désigne ici deux objets différents.*

Remarque 29. *Dans les expressions* (83) *p.* 168 *et* (87) *p.* 171*, respectivement* $\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\,\mathbf{e}_i$ *et* $\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\,u^{j'}$*, les matrices de dérivées partielles sont transposées l'une de l'autre. La sommation se faisant sur l'indice répété, elle dépend du terme qui suit.*

19.5.2 Transformation des composantes covariantes

À partir du changement de base naturelle (83) p. 168 :

$$\begin{aligned} \forall j \quad u_{j'} &= \boldsymbol{OM} \cdot \mathbf{e}_{j'} \\ &= \boldsymbol{OM} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\,\mathbf{e}_i \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\,(\boldsymbol{OM} \cdot \mathbf{e}_i) \end{aligned}$$

Par changement de base naturelle, les composantes covariantes se transforment selon :

$$\boxed{\forall j \quad u_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\,u_i}$$

$$\begin{cases} u_{1'} = \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\,u_1 + \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\,u_2 + \cdots + \dfrac{\partial x^n}{\partial x^{1'}}\,u_n \\ u_{2'} = \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}\,u_1 + \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}\,u_2 + \cdots + \dfrac{\partial x^n}{\partial x^{2'}}\,u_n \\ \quad\vdots \\ u_{n'} = \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{n'}}\,u_1 + \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{n'}}\,u_n + \cdots + \dfrac{\partial x^n}{\partial x^{n'}}\,u_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{1'} \\ \vdots \\ u_{n'} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial x^{1'}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{n'}} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial x^{n'}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \\ &= A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En composantes covariantes :

$$\boxed{\mathbf{u}'_{cov} = A\mathbf{u}_{cov}} \tag{88}$$

Les composantes covariantes se transforment comme les vecteurs de base, relations (79) p. 166. De même :

$$\begin{aligned} \forall i \quad u_i &= \boldsymbol{OM} \cdot \mathbf{e}_i \\ &= \boldsymbol{OM} \cdot \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\,\mathbf{e}_{j'} \\ &= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\,(\boldsymbol{OM} \cdot \mathbf{e}_{j'}) \end{aligned}$$

$$\forall i \quad u_i = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\,u_{j'} \tag{89}$$

En notation matricielle, en composantes covariantes :

$$\mathbf{u}_{cov} = B\mathbf{u}'_{cov}$$

19.5.3 Exemples

Exemple 19.5.1. *Soient* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ *et* $(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'})$ *deux bases normées quelconques (Fig. 19.3).*

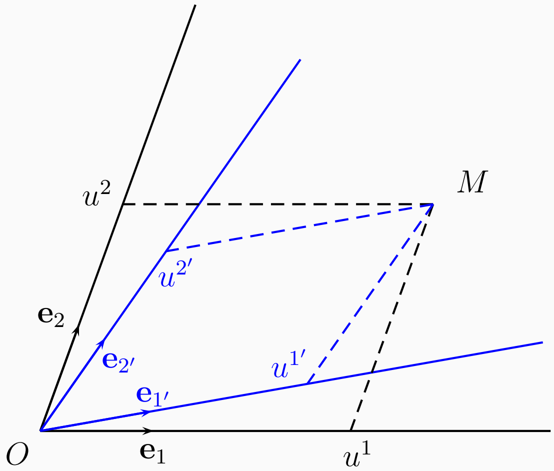


Fig. 19.3 – Transformation des composantes contravariantes

Écrivons l'expression du vecteur $\boldsymbol{OM}$ *en composantes contravariantes dans chaque base :*

$$\begin{aligned} u^{1'}\mathbf{e}_{1'} + u^{2'}\mathbf{e}_{2'} &= u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 \\ &= u^1\left(B_1^{1'}\mathbf{e}_{1'} + B_1^{2'}\mathbf{e}_{2'}\right) + u^2\left(B_2^{1'}\mathbf{e}_{1'} + B_2^{2'}\mathbf{e}_{2'}\right) \\ &= \left(u^1B_1^{1'} + u^2B_2^{1'}\right)\mathbf{e}_{1'} + \left(u^1B_1^{2'} + u^2B_2^{2'}\right)\mathbf{e}_{2'} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} u^{1'} = B_1^{1'}u^1 + B_2^{1'}u^2 \\ u^{2'} = B_1^{2'}u^1 + B_2^{2'}u^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B^{1'}_{\ 1} & B^{1'}_{\ 2} \\ B^{2'}_{\ 1} & B^{2'}_{\ 2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = B^T\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

De même :

$$\begin{aligned} u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 &= u^{1'}\mathbf{e}_{1'} + u^{2'}\mathbf{e}_{2'} \\ &= u^{1'}\left(A_{1'}^1\mathbf{e}_1 + A_{1'}^2\mathbf{e}_2\right) + u^{2'}\left(A_{2'}^1\mathbf{e}_1 + A_{2'}^2\mathbf{e}_2\right) \\ &= \left(u^{1'}A_{1'}^1 + u^{2'}A_{2'}^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(u^{1'}A_{1'}^2 + u^{2'}A_{2'}^2\right)\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

par conséquent :

$$\begin{cases} u^1 = A_{1'}^1u^{1'} + A_{2'}^1u^{2'} \\ u^2 = A_{1'}^2u^{1'} + A_{2'}^2u^{2'} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}u^1\\u^2\end{pmatrix} &= \begin{bmatrix}A^1_{1'} & A^1_{2'}\\A^2_{1'} & A^2_{2'}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u^{1'}\\u^{2'}\end{pmatrix}\\ &= A^T\begin{pmatrix}u^{1'}\\u^{2'}\end{pmatrix}\\ &= K\begin{pmatrix}u^{1'}\\u^{2'}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemple 19.5.2. *Soit le vecteur* $\boldsymbol{OM} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2$, *déterminons ses composantes contravariantes dans la nouvelle base* $(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'})$ *définie dans l'exercice* *19.3.1 p. 169* *de rotation d'une base. En utilisant les coefficients* $\partial x^{i'}/\partial x^j$ *déjà calculés :*

$$\begin{cases}u^{1'} = B^{1'}_1 u^1 + B^{1'}_2 u^2\\ u^{2'} = B^{2'}_1 u^1 + B^{2'}_2 u^2\end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases}u^{1'} = \cos(\alpha)\, u^1 + \sin(\alpha)\, u^2\\ u^{2'} = -\sin(\alpha)\, u^1 + \cos(\alpha)\, u^2\end{cases}$$

Nous pouvons aussi les déterminer en remplaçant les vecteurs de l'ancienne base :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{OM} &= u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2\\ &= u^1\left(\cos(\alpha)\,\mathbf{e}_{1'} - \sin(\alpha)\,\mathbf{e}_{2'}\right) + u^2\left(\sin(\alpha)\,\mathbf{e}_{1'} + \cos(\alpha)\,\mathbf{e}_{2'}\right)\\ &= \left(\cos(\alpha)\, u^1 + \sin(\alpha)\, u^2\right)\mathbf{e}_{1'} + \left(-\sin(\alpha)\, u^1 + \cos(\alpha)\, u^2\right)\mathbf{e}_{2'}\\ &= u^{1'}\mathbf{e}_{1'} + u^{2'}\mathbf{e}_{2'}\end{aligned}$$

Exemple 19.5.3. *Dans le système de coordonnées* (x^1, x^2), *soit* $\mathbf{u}$ *un champ de vecteurs de composantes contravariantes* $(u^1 = x^2, u^2 = x^1)$. *Quelles sont ses composantes contravariantes* $(u^{1'}, u^{2'})$ *lors du changement de coordonnées :*

$$\begin{cases}x^{1'} = \left(x^2\right)^2\\ x^{2'} = x^1 x^2\end{cases}$$

(1) Méthode indicielle

$$\begin{aligned}u^{1'} &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\, u^1 + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\, u^2\\ &= 2x^2u^2\\ &= 2x^2x^1\\ u^{2'} &= \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\, u^1 + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\, u^2\\ &= x^2u^1 + x^1u^2\\ &= \left(x^2\right)^2 + \left(x^1\right)^2\end{aligned}$$

(2) Méthode matricielle

La définition 19.1.1 p. 161, $J \triangleq \left[\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right]_{22}$*, et la relation* (86) *p. 171,* $\mathbf{u}' = J\mathbf{u}$*, donnent :*

$$\begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x^2 \\ x^2 & x^1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$\det J \neq 0$ *implique* $x^2 \neq 0$ *donc* $x^{1'} \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^1x^2 \\ (x^2)^2 + (x^1)^2 \end{pmatrix}$$

Par exemple, si $\mathbf{u}$ *est un vecteur de composantes contravariantes* $(1, 1)$ *:*

$$\begin{pmatrix} u^{1'} \\ u^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 19.5.4. *Soient* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ *et* $(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'})$ *deux bases normées quelconques (Fig. 19.4). En partant de l'expression des composantes covariantes :*

$$\begin{cases} u_{1'} = \boldsymbol{OM} \cdot \mathbf{e}_{1'} \\ u_{2'} = \boldsymbol{OM} \cdot \mathbf{e}_{2'} \end{cases}$$

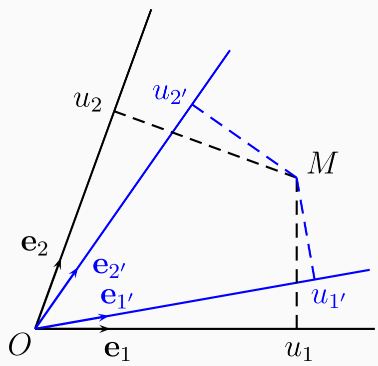


Fig. 19.4 – Transformation des composantes covariantes

$$\begin{cases} u_{1'} = \boldsymbol{OM} \cdot (A^1_{1'}\mathbf{e}_1 + A^2_{1'}\mathbf{e}_2) \\ u_{2'} = \boldsymbol{OM} \cdot (A^1_{2'}\mathbf{e}_1 + A^2_{2'}\mathbf{e}_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = A^1_{1'}\,\boldsymbol{OM} \cdot \mathbf{e}_1 + A^2_{1'}\,\boldsymbol{OM} \cdot \mathbf{e}_2 \\ u_{2'} = A^1_{2'}\,\boldsymbol{OM} \cdot \mathbf{e}_1 + A^2_{2'}\,\boldsymbol{OM} \cdot \mathbf{e}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{1'} = A^1_{1'}\,u_1 + A^2_{1'}\,u_2 \\ u_{2'} = A^1_{2'}\,u_1 + A^2_{2'}\,u_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_{2'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A^1_{1'} & A^2_{1'} \\ A^1_{2'} & A^2_{2'} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

De même :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_{2'} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_{2'} \end{pmatrix}$$

Dans une base non normée ou non orthogonale, les composantes covariantes et contravariantes (selon comment on projette le vecteur sur la base) ne se transforment pas de la même manière par changement de base.

Exemple 19.5.5. *Dans la base orthonormée* $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$*, on considère les deux vecteurs* $\mathbf{u}\,(u_1, u_2, u_3)$ *et* $\mathbf{v}\,(v_1, v_2, v_3)$ *de* E_3*. La base étant orthonormée les composantes contravariantes et covariantes sont confondues. Effectuons le changement de base qui passe à la nouvelle base* $\{\mathbf{e}_{1'}\,(1,1,1)\,, \mathbf{e}_{2'}\,(0,1,1)\,, \mathbf{e}_{3'}\,(0,0,1)\}$*, et déterminons les nouvelles composantes de* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$*.*
Pour les composantes contravariantes :

$$\begin{aligned} u_1\mathbf{e}_x + u_2\mathbf{e}_y + u_3\mathbf{e}_z &= u^{1'}\mathbf{e}_{1'} + u^{2'}\mathbf{e}_{2'} + u^{3'}\mathbf{e}_{3'} \\ &= u^{1'}\left(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z\right) + u^{2'}\left(\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z\right) + u^{3'}\mathbf{e}_z \\ &= u^{1'}\mathbf{e}_x + \left(u^{1'} + u^{2'}\right)\mathbf{e}_y + \left(u^{1'} + u^{2'} + u^{3'}\right)\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_1 = u^{1'} \\ u_2 = u^{1'} + u^{2'} \\ u_3 = u^{1'} + u^{2'} + u^{3'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^{1'} = u_1 \\ u^{2'} = u_2 - u_1 \\ u^{3'} = u_3 - u_2 \end{cases}$$

De même pour $\mathbf{v}$ *:*

$$\begin{cases} v^{1'} = v_1 \\ v^{2'} = v_2 - v_1 \\ v^{3'} = v_3 - v_2 \end{cases}$$

Pour les composantes covariantes, en utilisant la définition 11.4.1 *p.* 92 *:*

$$\begin{cases} u_{1'} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_{1'} \\ u_{2'} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_{2'} \\ u_{3'} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_{3'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = (u_1, u_2, u_3)\cdot(1,1,1) \\ u_{2'} = (u_1, u_2, u_3)\cdot(0,1,1) \\ u_{3'} = (u_1, u_2, u_3)\cdot(0,0,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = u_1 + u_2 + u_3 \\ u_{2'} = u_2 + u_3 \\ u_{3'} = u_3 \end{cases}$$

De même pour $\mathbf{v}$ *:*

$$\begin{cases} v_{1'} = v_1 + v_2 + v_3 \\ v_{2'} = v_2 + v_3 \\ v_{3'} = v_3 \end{cases}$$

Une seconde méthode consiste à passer des composantes contravariantes dans la nouvelle base aux composantes covariantes en utilisant le tenseur métrique, relations (43) *p.* 99 *:*

$$\begin{cases} u_{1'} = \left(u^{1'}\mathbf{e}_{1'} + u^{2'}\mathbf{e}_{2'} + u^{3'}\mathbf{e}_{3'}\right)\cdot\mathbf{e}_{1'} \\ u_{2'} = \left(u^{1'}\mathbf{e}_{1'} + u^{2'}\mathbf{e}_{2'} + u^{3'}\mathbf{e}_{3'}\right)\cdot\mathbf{e}_{2'} \\ u_{3'} = \left(u^{1'}\mathbf{e}_{1'} + u^{2'}\mathbf{e}_{2'} + u^{3'}\mathbf{e}_{3'}\right)\cdot\mathbf{e}_{3'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = u^{1'}\mathbf{e}_{1'}\cdot\mathbf{e}_{1'} + u^{2'}\mathbf{e}_{2'}\cdot\mathbf{e}_{1'} + u^{3'}\mathbf{e}_{3'}\cdot\mathbf{e}_{1'} \\ u_{2'} = u^{1'}\mathbf{e}_{1'}\cdot\mathbf{e}_{2'} + u^{2'}\mathbf{e}_{2'}\cdot\mathbf{e}_{2'} + u^{3'}\mathbf{e}_{3'}\cdot\mathbf{e}_{2'} \\ u_{3'} = u^{1'}\mathbf{e}_{1'}\cdot\mathbf{e}_{3'} + u^{2'}\mathbf{e}_{2'}\cdot\mathbf{e}_{3'} + u^{3'}\mathbf{e}_{3'}\cdot\mathbf{e}_{3'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = u^{1'}g_{11} + u^{2'}g_{21} + u^{3'}g_{31} \\ u_{2'} = u^{1'}g_{12} + u^{2'}g_{22} + u^{3'}g_{32} \\ u_{3'} = u^{1'}g_{13} + u^{2'}g_{23} + u^{3'}g_{33} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{1'} = u_1 + u_2 + u_3 \\ u_{2'} = u_2 + u_3 \\ u_{3'} = u_3 \end{cases}$$

Déterminons le produit scalaire de $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$*. Dans la base d'origine :*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Dans la nouvelle base :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= u_{i'}v^{i'}\\ &= u_{1'}v^{1'} + u_{2'}v^{2'} + u_{3'}v^{3'}\\ &= (u_1+u_2+u_3)\,v_1 + (u_2+u_3)\,(v_2-v_1) + u_3\,(v_3-v_2)\\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\end{aligned}$$

ou bien,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= u^{i'}v_{i'}\\ &= u^{1'}v_{1'} + u^{2'}v_{2'} + u^{3'}v_{3'}\\ &= u^1\,(v_1+v_2+v_3) + (u_2-u_1)\,(v_2+v_3) + (u_3-u_2)\,v_3\\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\end{aligned}$$

et le produit scalaire est bien invariant.

Exemple 19.5.6. *Dans le système de coordonnées* (x^1, x^2)*, soit* $\mathbf{u}$ *un champ de vecteurs de composantes covariantes* $(u_1 = x^2, u_2 = x^1)$*. Quelles sont ses composantes covariantes* $(u_{1'}, u_{2'})$ *lors du changement de coordonnées :*

$$\begin{cases} x^{1'} = \left(x^2\right)^2 \\ x^{2'} = x^1x^2 \end{cases}$$

(1) Méthode indicielle

On pose $\epsilon = \pm 1$.

$$u_{1'} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\,u_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\,u_2 = \frac{-\epsilon x^{2'}}{2\left(\sqrt{x^{1'}}\right)^3}\left(\epsilon\sqrt{x^{1'}}\right) + \frac{\epsilon}{2\sqrt{x^{1'}}}\frac{\epsilon x^{2'}}{\sqrt{x^{1'}}} \qquad = -\frac{x^{2'}}{2x^{1'}} + \frac{x^{2'}}{2x^{1'}} = 0$$

$$u_{2'} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}\,u_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}\,u_2 = \frac{\epsilon}{\sqrt{x^{1'}}}\left(\epsilon\sqrt{x^{1'}}\right) + 0\times\frac{\epsilon x^{2'}}{\sqrt{x^{1'}}} = 1$$

(2) Méthode matricielle

(a) Première méthode

D'après *88 p. 172**,* $\mathbf{u}'_{cov} = \left(J^{-1}\right)^T\mathbf{u}$*, avec* $J^{-1} \triangleq \left[\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\right]_{22}$*. On inverse le système d'équations du changement de coordonnées :*

$$\begin{cases} x^2 = \epsilon\sqrt{x^{1'}} \\ x^1 = \dfrac{x^{2'}}{x^2} = \dfrac{\epsilon x^{2'}}{\sqrt{x^{1'}}} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_{2'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\epsilon x^{2'}}{2\left(\sqrt{x^{1'}}\right)^3} & \frac{\epsilon}{2\sqrt{x^{1'}}} \\ \frac{\epsilon}{\sqrt{x^{1'}}} & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \epsilon\sqrt{x^{1'}} \\ \frac{\epsilon x^{2'}}{\sqrt{x^{1'}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Seconde méthode

On inverse J donné dans l'exemple 19.5.3 p. 174 puis on prend la transposée. Nous obtenons $(J^{-1})^T$ en fonction de x^1 et x^2 :

$$\begin{pmatrix} u_{1'} \\ u_{2'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-x^1}{2(x^2)^2} & \frac{1}{2x^2} \\ \frac{1}{x^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 19.5.7. *Au point de coordonnées polaires $(3, 30°)$, la base polaire a pour expression :*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30° & \sin 30° \\ -3\sin 30° & 3\cos 30° \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -3/2 & 3\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix}$$

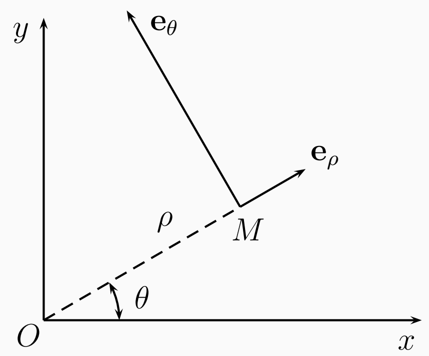


Fig. 19.5 – Base naturelle en coordonnées polaires (ρ, θ)

Remarque 30. *On note que $\|\mathbf{e}_\rho\| = 1$ et $\|\mathbf{e}_\theta\| = 3$.*

Exemple 19.5.8. *Dans le système de coordonnées rectangulaires (x, y), soit $\mathbf{u}$ un vecteur de composantes contravariantes (u^x, u^y). Quelles sont ses composantes contravariantes $\left(u^\rho, u^\theta\right)$ lors de la transformation en coordonnées polaires (ρ, θ) ?*

(1) En notation indicielle, les relations (85) p. 171 donnent :

$$\begin{cases} u^\rho = \dfrac{\partial \rho}{\partial x} u^x + \dfrac{\partial \rho}{\partial y} u^y = u^x \cos(\theta) + u^y \sin(\theta) \\ u^\theta = \dfrac{\partial \theta}{\partial x} u^x + \dfrac{\partial \theta}{\partial y} u^y = \dfrac{-u^x \sin(\theta) + u^y \cos(\theta)}{\rho} \end{cases}$$

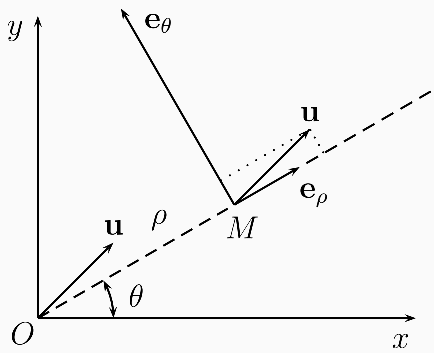
(2) En notation matricielle, la relation (86) p. 171 donne :

$$\mathbf{u}' = J\mathbf{u}$$

$$\begin{pmatrix} u^\rho \\ u^\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{\sin(\theta)}{\rho} & \frac{\cos(\theta)}{\rho} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^x \\ u^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^x \cos(\theta) + u^y \sin(\theta) \\ \left(-u^x \sin(\theta) + u^y \cos(\theta)\right)/\rho \end{pmatrix}$$

Si $\mathbf{u}\,(u^x = 1, u^y = 1)$ *alors au point de coordonnées polaires* $(3, 30°)$ *:*

$$\begin{pmatrix} u^\rho \\ u^\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/6 & \sqrt{3}/6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$



Si $\mathbf{u}(x, y)$ *est le vecteur position alors :*

$$\begin{pmatrix} u^\rho \\ u^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta)\cos(\theta) + \rho\sin(\theta)\sin(\theta) \\ (-\rho\cos(\theta)\sin(\theta) + \rho\sin(\theta)\cos(\theta))\,/\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 19.5.9. *Dans le système de coordonnées rectangulaires* (x, y)*, soit* $\mathbf{u}$ *un vecteur de composantes covariantes* (u_x, u_y)*. Quelles sont ses composantes covariantes* (u_ρ, u_θ) *lors de la transformation en coordonnées polaires* (ρ, θ) *:*

$$T \quad : \quad \begin{cases} x\,(\rho, \theta) = \rho\cos(\theta) \\ y\,(\rho, \theta) = \rho\sin(\theta) \end{cases} \qquad \rho \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

D'après (78) *p.* *164* *:*

$$J = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{\sin(\theta)}{\rho} & \frac{\cos(\theta)}{\rho} \end{bmatrix}$$

La relation (88) *p.* *172* *donne :*

$$\mathbf{u}'_{cov} = \left(J^{-1}\right)^T \mathbf{u}$$

$$\begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x\cos(\theta) + u_y\sin(\theta) \\ -u_x\rho\sin(\theta) + u_y\rho\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Par exemple si $\mathbf{u}\,(u_x = 1, u_y = 1)$ *alors au point de coordonnées polaires* $(3, 30°)$ *:*

$$\begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -3/2 & 3\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{-3+3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

On vérifie que l'on a bien :

$$\begin{cases} u_\rho = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\rho = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{e}_\rho\|\cos(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{e}_\rho}) = \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ u_\theta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\theta = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{e}_\theta\|\cos(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{e}_\theta}) = 3\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-3+3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

19.6 Cas des bases réciproques

19.6.1 Transformation des composantes contravariantes

Soient $(\mathbf{e}_i)$ et $(\mathbf{e}_{j'})$ deux bases naturelles d'un espace vectoriel, associées à deux systèmes de coordonnées (x^i) et $(x^{j'})$. Chacune de ses bases a une base réciproque. Avec les relations (66) p. 121 et (89) p. 172 :

$$\begin{aligned} \forall i \quad \mathrm{u}^i &= u_i \\ &= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} u_{j'} \\ &= \sum_j \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \mathrm{u}^{j'} \end{aligned} \tag{90}$$

Les composantes contravariantes dans la base réciproque se transforment de façon identique aux composantes covariantes dans la base d'origine.

19.6.2 Transformation des composantes covariantes

Soient $(\mathbf{e}_i)$ et $(\mathbf{e}_{j'})$ deux bases naturelles d'un espace vectoriel. Avec les relations (68) p. 122 et (87) p. 171 :

$$\begin{aligned} \forall i \quad \mathrm{u}_i &= u^i \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} u^{j'} \\ &= \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \mathrm{u}_{j'} \end{aligned}$$

Les composantes covariantes dans la base réciproque se transforment de façon identique aux composantes contravariantes dans la base d'origine.

19.6.3 Transformation des vecteurs de base

Soient $(\boldsymbol{\epsilon}_i)$ la base réciproque de la base $(\mathbf{e}_i)$ et soit $(\boldsymbol{\epsilon}_{j'})$ la base réciproque de la base $(\mathbf{e}_{j'})$. Soit A la matrice changement de base de la base d'origine $(\mathbf{e}_i)$ vers la nouvelle base $(\mathbf{e}_{j'})$, et soit A' la matrice changement de base de la nouvelle base $(\mathbf{e}_{j'})$ vers la base d'origine $(\mathbf{e}_i)$. Avec les relations (90) p. 180,

$$\begin{aligned} \mathrm{u}^{i'} \boldsymbol{\epsilon}_{i'} &= \mathrm{u}^j \boldsymbol{\epsilon}_j \\ &= \sum_j \left(\sum_i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \mathrm{u}^{i'} \right) \boldsymbol{\epsilon}_j \\ \forall i \quad \boldsymbol{\epsilon}_{i'} &= \sum_j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \boldsymbol{\epsilon}_j \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \quad \mathbf{e}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \mathbf{e}^j} \tag{91}$$

En utilisant les relations (82) p. 168 :

$$\forall k \quad \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\,\mathbf{e}^{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\,\mathbf{e}^j$$
$$= \delta^k_j \mathbf{e}^j$$

$$\boxed{\forall k \quad \mathbf{e}^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\,\mathbf{e}^{i'}} \tag{92}$$

Les vecteurs de base de la base réciproque se transforment de façon « contraire » (par la matrice inverse de la transposée) aux vecteurs de base de la base d'origine, relations (80) p. 166.

20
Algèbre tensorielle

20.1 Introduction

Les lois de la géométrie et de la physique ont une existence intrinsèque indépendante du système de coordonnées dans lequel on les exprime. Il est donc naturel d'essayer de se débarasser des systèmes de coordonnées et de raisonner sur des objets géométriques ou physiques. On a d'abord fait correspondre à ses objets des éléments simples euclidiens sur lesquels on a défini des opérations dont on a étudié les propriétés. Ce procédé a conduit au *Calcul vectoriel*, puis au *Calcul tensoriel*. Cependant, le choix d'un système de coordonnées est resté nécessaire, et les vecteurs et tenseurs, bien qu'indépendants de tout système de coordonnées, sont donnés par leurs coordonnées, sans que cela soit contradictoire. Plutôt que de particulariser un système de coordonnées en en choisissant un, on écrit les équations sous une forme valable dans n'importe quel système de coordonnées.

Il existe en physique des quantités intrinsèques qui, comme les vecteurs, existent en elles-mêmes indépendamment de la base dans laquelle on les exprime. Par exemple la matrice inertie ou la matrice rotation d'un solide. Ces matrices carrées particulières sont appelées des *tenseurs*. Toute combinaison linéaire de deux tenseurs donne un tenseur, les tenseurs sont donc des vecteurs d'après la définition 3.1.2 p. 15. Les matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont aussi des vecteurs et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En effet, toute combinaison linéaire de deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ donne une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Elles sont de plus invariantes par changement de base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Les tenseurs sont des matrices particulières car ils sont invariants par changement de base lié au changement de coordonnées de l'espace-temps physique. Un changement de coordonnées de l'espace-temps induit un changement de base de l'espace vectoriel des forces, des vitesses, des accélérations, des tenseurs en général, mais pas de celui des matrices. Les tenseurs ont donc un sens physique que n'ont pas les matrices.

Un tenseur avec p indices contravariants est dit contravariant d'ordre p, avec q indices covariants il est dit covariant d'ordre q. S'il est les deux il est dit d'ordre $p+q$. L'ordre d'un tenseur n'a donc rien à voir avec l'ordre d'une matrice qui est de combien varie ses indices.

Habituellement on appelle « vecteurs » uniquement les tenseurs d'ordre un alors que tous les tenseurs sont des vecteurs, quel que soit leur ordre. En physique, nous utiliserons cet abus de langage pour dire que les vecteurs appartiennent à une catégorie plus grande d'objets mathématiques, les tenseurs. Les scalaires sont alors des tenseurs d'ordre zéro.

Les tenseurs d'ordre deux sont souvent représentés par des matrices carrées dont les éléments sont leurs composantes. Nous avons vu que cette représentation n'est valable que dans les espaces pré-euclidiens, les composantes covariantes et contravariantes étant confondues. De plus, pour les tenseur d'ordre trois la multiplication des matrices $3D$ n'est pas définie. Il faut alors abandonner la représentation matricielle des tenseurs et n'utiliser que la représentation indicielle.

Toutes les équations de la physique doivent être invariantes de forme par changement de coordonnées (donc par changement de base), elles sont dites *covariantes*. C'est le principe de covariance des équations de la physique (cette covariance n'a pas de rapport avec la covariance des composantes). Or, pour les vecteurs comme pour les tenseurs, les composantes de même variance se transforment de la même façon. Toutes les équations de la physique doivent donc être écrites sous la forme d'une égalité entre tenseurs de même ordre et de même variance. Pour assurer cette invariance des tenseurs, leurs composantes doivent se transformer d'une façon bien précise que nous allons déterminer. Cette propriété d'invariance par changement de base est fondamentale puisqu'elle peut servir de définition des tenseurs.

Dans un second temps, de même que nous avons défini les vecteurs et les espaces vectoriels uniquement à partir de leurs propriétés opératoires, nous définirons les tenseurs et les espaces tensoriels uniquement à partir de leurs propriétés opératoires.

EXEMPLE 20.1.1. *Une façon simple de former un nouveau vecteur (dans le sens d'une quantité indépendante de la base dans laquelle on l'exprime), consiste à multiplier les composantes de deux vecteurs dans un ordre déterminé. Soient* $\mathbf{u}\,(u^1, u^2)$ *et* $\mathbf{v}\,(v^1, v^2)$ *deux vecteurs de l'espace vectoriel* E_2*, le nouveau vecteur* $\mathbf{T}$ *a quatre composantes et appartient à l'espace vectoriel* E_4 *(les dimensions des espaces vectoriels de départ se multiplient) :*

$$\mathbf{T} = \left(u^1v^1, u^1v^2, u^2v^1, u^2v^2\right)$$

NOTATION 18. *En notation indicielle, si* $\mathbf{u} = u^i\mathbf{e}_i$ *et* $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$ *alors*

$$\forall i, j \quad t^{ij} = u^i v^j$$

où l'ordre des indices i *et* j *compte car en général* $u^1v^2 \neq u^2v^1$ *donc* $t^{ij} \neq t^{ji}$.

En utilisant cette notation :

$$\mathbf{T} = \left(t^{11}, t^{12}, t^{21}, t^{22}\right)$$

$\mathbf{T}$ *est un tenseur, appelé produit tensoriel de* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$*, noté* $\otimes$*. On le défini comme suit :*

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} &= \left(u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2\right) \otimes \left(v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2\right) \\
&= u^1\mathbf{e}_1 \otimes v^1\mathbf{e}_1 + u^1\mathbf{e}_1 \otimes v^2\mathbf{e}_2 + u^2\mathbf{e}_2 \otimes v^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 \otimes v^2\mathbf{e}_2 \\
&= u^1v^1\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + u^1v^2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + u^2v^1\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + u^2v^2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \\
&= t^{11}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + t^{12}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + t^{21}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + t^{22}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \\
&= \mathbf{T}
\end{aligned}$$

Soient $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ *et* $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ *les vecteurs de base d'une base orthonormée de* E_2 *:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 &= (1 \times 1, 1 \times 0, 0 \times 1, 0 \times 0) \\
&= (1, 0, 0, 0) \\
\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 &= (1 \times 0, 1 \times 1, 0 \times 0, 0 \times 1) \\
&= (0, 1, 0, 0) \\
\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 &= (0 \times 1, 0 \times 0, 1 \times 1, 1 \times 0) \\
&= (0, 0, 1, 0) \\
\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 &= (0 \times 0, 0 \times 1, 1 \times 0, 1 \times 1) \\
&= (0, 0, 0, 1)
\end{aligned}$$

En écriture matricielle nous retrouvons le produit de Kronecker du chapitre 15 *:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u^1 \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \\ u^2 \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 v^1 \\ u^1 v^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u^2 v^1 \\ u^2 v^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{11} \\ t^{12} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} t^{21} \\ t^{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{T}
\end{aligned}$$

Notez qu'ici $\mathbf{T}$ *a deux composantes et non quatre.*

20.2 Composantes deux fois contravariantes

Par changement de base naturelle, les composantes du tenseur $\mathbf{T}$*, produit tensoriel des vecteurs* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$*, se tranforment de la façon suivante :*

$$\begin{aligned}
\forall i, j \quad t^{i'j'} &= u^{i'} v^{j'} \\
&= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} u^k \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^l} v^l \\
&= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^l} u^k v^l \\
&= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^l} t^{kl} \qquad (93)
\end{aligned}$$

Les t^{ij} *sont les composantes deux fois contravariantes du tenseur* $\mathbf{T}$.

Le produit tensoriel des vecteurs des bases naturelles est défini de façon à assurer l'invariance du vecteur $\mathbf{T}$ *par changement de base naturelle grâce aux relations* (80) *p.* *166* *:*

$$\begin{aligned}
\forall i, j \quad (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)' &= \mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'} \\
&= \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \mathbf{e}_k \otimes \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} \mathbf{e}_l \\
&= \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \qquad (94)
\end{aligned}$$

T *est alors indépendant de la base naturelle dans laquelle on l'exprime :*

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})' &= \left(u^i\mathbf{e}_i \otimes v^j\mathbf{e}_j\right)' \\
&= \left(u^i v^j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right)' \\
&= t^{i'j'}\left(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right)' \\
&= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^l}\, t^{kl}\, \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}}\left(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l\right) \\
&= t^{kl}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \\
&= u^k\mathbf{e}_k \otimes v^l\mathbf{e}_l \\
&= \mathbf{u}\otimes\mathbf{v}
\end{aligned}$$

Exemple 20.2.1. *On considère deux vecteurs* $\mathbf{u} = 4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ *et* $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$ *de* E_2. *Déterminons les composantes contravariantes du produit tensoriel de* **u** *par* **v**.

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \mathbf{u}\otimes\mathbf{v} \\
&= (4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2)\otimes(\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2) \\
&= 4\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 + 20\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2 + 3\,\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1 + 15\,\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1
\end{aligned}$$

Nous avons :

$$t^{11} = 4 \qquad t^{12} = 20 \qquad t^{21} = 3 \qquad t^{22} = 15$$

En reprenant l'exercice 19.3.1 p. 169 de rotation d'une base, déterminons les composantes contravariantes du produit tensoriel dans la nouvelle base naturelle. Par changement de base naturelle, les composantes de **T** *se tranforment selon* (93) *p. 185 avec* $B_i^{j'} = \partial x^{j'}/\partial x^i$ *:*

$$B_1^{1'} = \cos(\alpha) \qquad B_1^{2'} = -\sin(\alpha) \qquad B_2^{1'} = \sin(\alpha) \qquad B_2^{2'} = \cos(\alpha)$$

Nous avons alors :

$$\begin{cases}
t^{1'1'} = B_1^{1'}B_1^{1'}t^{11} + B_1^{1'}B_2^{1'}t^{12} + B_2^{1'}B_1^{1'}t^{21} + B_2^{1'}B_2^{1'}t^{22} \\
t^{1'2'} = B_1^{1'}B_1^{2'}t^{11} + B_1^{1'}B_2^{2'}t^{12} + B_2^{1'}B_1^{2'}t^{21} + B_2^{1'}B_2^{2'}t^{22} \\
t^{2'1'} = B_1^{2'}B_1^{1'}t^{11} + B_1^{2'}B_2^{1'}t^{12} + B_2^{2'}B_1^{1'}t^{21} + B_2^{2'}B_2^{1'}t^{22} \\
t^{2'2'} = B_1^{2'}B_1^{2'}t^{11} + B_1^{2'}B_2^{2'}t^{12} + B_2^{2'}B_1^{2'}t^{21} + B_2^{2'}B_2^{2'}t^{22}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
t^{1'1'} = 4\cos^2\alpha + 17\cos(\alpha)\sin(\alpha) + 15\sin^2\alpha \\
t^{1'2'} = 11\sin(\alpha)\cos(\alpha) + 20\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha \\
t^{2'1'} = 11\sin(\alpha)\cos(\alpha) - 20\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha \\
t^{2'2'} = 4\sin^2\alpha - 23\sin(\alpha)\cos(\alpha) + 15\cos^2\alpha
\end{cases}$$

20.3 Produit tensoriel

Dans ce paragraphe nous formalisons ce que nous venons de voir en introduction.

20.3.1 Produit tensoriel de deux vecteurs

Soient E_n et F_p deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et p, et soit $E_n \times F_p$ un espace à $q = n \times p$ dimensions. $\forall \mathbf{u} \in E_n, \forall \mathbf{v} \in F_p$, au couple de vecteurs $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ nous faisons correspondre l'élément noté $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ de l'espace $E_n \times F_p$, la loi de composition $\otimes$ ayant les propriétés suivantes :

(1) $\forall(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in E_n$, $\forall(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in F_p$, la loi $\otimes$ est distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition vectorielle (notée $+$) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \otimes (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \\ (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \otimes \mathbf{v} &= \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{v} \end{aligned}$$

(2) Soit α un scalaire. La loi $\otimes$ est associative par rapport à la multiplication par un scalaire :

$$\begin{aligned} \alpha\,(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) &= \alpha\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} \otimes \alpha\mathbf{v} \end{aligned}$$

Définition 20.3.1. *Élément produit tensoriel de deux vecteurs*
La loi de composition $\otimes$ est appelée multiplication tensorielle. L'élément $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ est appelé produit tensoriel des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ou produit dyadique.

Définition 20.3.2. *Espace produit cartésien*
L'espace produit cartésien $E_n \times F_p$ est l'ensemble des produits tensoriels de tous les vecteurs des espaces vectoriels E_n et F_p. Ce n'est pas un espace vectoriel car une combinaison linéaire de ses éléments ne donne pas nécessairement un élément de cet espace.

Définition 20.3.3. *Espace produit tensoriel*
L'espace vectoriel $G_q = E_n \otimes F_p$ est appelé produit tensoriel des espaces vectoriels E_n et F_p. C'est l'espace de toutes les combinaisons linéaires des éléments de $E_n \times F_p$.

La loi de composition $\otimes$ a également la propriété suivante :

(3) Soit $(\mathbf{e}_i)$ une base de E_n et soit $(\boldsymbol{f}_\alpha)$ une base de F_p. Les np éléments,

$$\mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha$$

forment une base de G_q.

Remarque 31. *L'espace $E_n \otimes F_p$ se distingue de l'espace G_q en ce qu'il est muni de la loi $\otimes$. Nous dirons que G_q constitue le support de $E_n \otimes F_p$.*

20.3.2 Expression analytique du produit tensoriel

THÉORÈME 20.3.1. *Les espaces E_n, F_p, et $E_n \otimes F_p$ étant rapportés à des bases associées par les relations $\mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha = \boldsymbol{\epsilon}_{i\alpha}$, la seule loi de composition satisfaisant aux propriétés du paragraphe 20.3.1 p. 187 est celle qui aux vecteurs $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{v} = v^\alpha \boldsymbol{f}_\alpha$ fait correspondre le vecteur $u^i v^\alpha \boldsymbol{\epsilon}_{i\alpha}$ de $E_n \otimes F_p$.*

DÉMONSTRATION. Soient $(\mathbf{e}_i)_{i=1,\ldots,n}$, $(\boldsymbol{f}_\alpha)_{\alpha=1,\ldots,p}$, et $(\boldsymbol{\epsilon}_{i\alpha})_{i=1,\ldots,n\ ;\ \alpha=1,\ldots,p}$ des bases respectives de E_n, F_p et de $E_n \otimes F_p$. Alors :

$$\forall \mathbf{u} \in E_n, \forall \mathbf{v} \in F_p, \quad \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u^i \mathbf{e}_i \otimes v^\alpha \boldsymbol{f}_\alpha$$

Supposons $n = 2$ et $p = 3$:

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \left(u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2\right) \otimes \left(v^1 \boldsymbol{f}_1 + v^2 \boldsymbol{f}_2 + v^3 \boldsymbol{f}_3\right)$$

En utilisant l'axiome (1) :

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u^1 \mathbf{e}_1 \otimes v^1 \boldsymbol{f}_1 + u^1 \mathbf{e}_1 \otimes v^2 \boldsymbol{f}_2 + u^1 \mathbf{e}_1 \otimes v^3 \boldsymbol{f}_3 + u^2 \mathbf{e}_2 \otimes v^1 \boldsymbol{f}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 \otimes v^2 \boldsymbol{f}_2 + u^2 \mathbf{e}_2 \otimes v^3 \boldsymbol{f}_3$$

En utilisant l'axiome (2) :

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u^1 v^1 \mathbf{e}_1 \otimes \boldsymbol{f}_1 + u^1 v^2 \mathbf{e}_1 \otimes \boldsymbol{f}_2 + u^1 v^3 \mathbf{e}_1 \otimes \boldsymbol{f}_3 + u^2 v^1 \mathbf{e}_2 \otimes \boldsymbol{f}_1 + u^2 v^2 \mathbf{e}_2 \otimes \boldsymbol{f}_2 + u^2 v^3 \mathbf{e}_2 \otimes \boldsymbol{f}_3$$

En généralisant à n et p quelconques :

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u^i v^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha$$

et avec l'axiome (3) :

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u^i v^\alpha \boldsymbol{\epsilon}_{i\alpha} \tag{95}$$

Les trois axiomes du paragraphe 20.3.1 p. 187 impliquent que les composantes du produit tensoriel $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ s'écrivent sous la forme $u^i v^\alpha$ dans la base $\boldsymbol{\epsilon}_{i\alpha}$.

L'expression analytique (95) de la loi de composition $\otimes$, implique-t-elle à son tour ces trois axiomes ?

Pour retrouver l'axiome (1), posons $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \otimes (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_3 \\
&= u^i v_3^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha \\
&= u^i \left(v_1^\alpha + v_2^\alpha\right) \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha \\
&= \left(u^i v_1^\alpha + u^i v_2^\alpha\right) \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha \\
&= u^i v_1^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha + u^i v_2^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha \\
&= u^i \mathbf{e}_i \otimes v_1^\alpha \boldsymbol{f}_\alpha + u^i \mathbf{e}_i \otimes v_2^\alpha \boldsymbol{f}_\alpha \\
&= \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_2
\end{aligned}$$

Pour retrouver l'axiome (2) à partir de la relation (95) p. 188, posons $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{u}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} \otimes \mathbf{v} &= w^i v^\beta \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\beta \\
(\alpha \mathbf{u}) \otimes \mathbf{v} &= \sum_i \left[\left(\alpha u^i\right) v^\beta \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\beta\right] \\
&= \alpha \left(u^i v^\beta \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\beta\right) \\
&= \alpha \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}
\end{aligned}$$

La relation (95) p. 188 est elle compatible avec l'axiome (3) p. 187 ?

Soit $(\mathbf{e}_i)$ une base de E_n et soit $(\boldsymbol{f}_\alpha)$ une base de F_p, le produit tensoriel $(\mathbf{e}_i) \otimes (\boldsymbol{f}_\alpha)$ forme une base de $E_n \otimes F_p$ par hypothèse. Soit $(\mathbf{e}_{j'})$ une autre base de E_n et soit $\left(\boldsymbol{f}_{\beta'}\right)$ une autre base de F_p, le produit tensoriel $(\mathbf{e}_{j'}) \otimes \left(\boldsymbol{f}_{\beta'}\right)$ est-t-il une base de $E_n \otimes F_p$?

Soient $\partial x^{j'}/\partial x^i$ et $B_\alpha^{\beta'}$ les matrices changement de base :

$$\begin{cases} \forall i \quad \mathbf{e}_i = \dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \mathbf{e}_{j'} \\ \forall \alpha \quad \boldsymbol{f}_\alpha = B_\alpha^{\beta'} \boldsymbol{f}_{\beta'} \end{cases}$$

Les éléments $\mathbf{T}$ s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \\ &= u^i v^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha \\ &= t^{i\alpha} \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha \end{aligned} \tag{96}$$

Effectuons le changement de base :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= t^{i\alpha} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \mathbf{e}_{j'} \otimes B_\alpha^{\beta'} \boldsymbol{f}_{\beta'} \\ &= t^{i\alpha} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} B_\alpha^{\beta'} \mathbf{e}_{j'} \otimes \boldsymbol{f}_{\beta'} \end{aligned} \tag{97}$$

Les $\mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha$ formant une base par hypothèse, d'après la relation (96), si $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ alors $\forall i, \forall \alpha,\ t^{i\alpha} = 0$. Cette implication restant vraie pour la relation (97), les éléments $\mathbf{e}_{j'} \otimes \boldsymbol{f}_{\beta'}$ sont linéairement indépendants, et constituent donc une base de l'espace $E_n \otimes F_p$. Nous dirons que $(\mathbf{e}_{j'}) \otimes \left(\boldsymbol{f}_{\beta'}\right)$ est la base associée aux bases $(\mathbf{e}_{j'})$ et $\left(\boldsymbol{f}_{\beta'}\right)$. □

20.3.3 Éléments d'un espace produit tensoriel

Tous les éléments de l'espace $E_n \otimes F_p$ sont-ils des produits tensoriels ?

Soit $\mathbf{T}$ un élément de l'espace $E_n \otimes F_p$:

$$\mathbf{T} = t^{i\alpha} \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha$$

Peut-on toujours l'écrire sous la forme :

$$\mathbf{T} = u^i v^\alpha \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha$$

où $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ est un vecteur de E_n et $\mathbf{v} = v^\alpha \boldsymbol{f}_\alpha$ un vecteur de F_p ? Raisonnons par l'absurde et supposons que, quel que soit $t^{i\alpha}$, l'on ait :

$$\forall i, \alpha \quad t^{i\alpha} = u^i v^\alpha$$

Prenons le cas où $n = p = 2$, alors :

$$\mathbf{T}(t^{11}, t^{12}, t^{21}, t^{22}) = \mathbf{T}(u^1 v^1, u^1 v^2, u^2 v^1, u^2 v^2)$$

soit,

$$u^1 v^1 = t^{11} \quad ; \quad u^1 v^2 = t^{12} \quad ; \quad u^2 v^1 = t^{21} \quad ; \quad u^2 v^2 = t^{22}$$

par conséquent :

$$\frac{v^1}{v^2} = \frac{t^{11}}{t^{12}} \quad \text{et} \quad \frac{v^1}{v^2} = \frac{t^{21}}{t^{22}}$$

soit :

$$\frac{t^{11}}{t^{12}} = \frac{t^{21}}{t^{22}}$$

ce qui a priori n'est pas toujours vrai, les composantes de l'élément $\mathbf{T}$ étant quelconques. Nous en concluons qu'il existe des éléments de l'espace $E_n \otimes F_p$ qui ne sont pas des produits tensoriels de deux vecteurs.

EXEMPLE 20.3.1. *Le tenseur* $\mathbf{T}$ *suivant est-il le produit tensoriel de deux vecteurs ?*

$$\mathbf{T} = 11\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 8\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 20\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + 12\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$$

Si $\mathbf{T}$ *est le produit tensoriel de deux vecteurs alors il est de la forme*

$$\mathbf{T} = u^i v^j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$$

et l'on a :

$$u^1 v^1 = 11, \qquad u^1 v^2 = 8, \qquad u^2 v^1 = 20, \qquad u^2 v^2 = 12$$

En faisant les rapports des deux premières expressions puis celui des deux dernières :

$$\frac{v^1}{v^2} = \frac{11}{8} \qquad\qquad \frac{v^1}{v^2} = \frac{20}{12}$$

Ces valeurs étant différentes, $\mathbf{T}$ *n'est pas le produit tensoriel de deux vecteurs.*

20.3.4 Produit tensoriel de deux espaces identiques

En pratique on a très souvent à effectuer le produit tensoriel de vecteurs appartenant à des espaces vectoriels identiques. Soient $(\mathbf{e}_i)$ une base de E_n, et soient $\mathbf{u} = u^i\mathbf{e}_i$ et $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$ deux vecteurs de cet espace. Le produit tensoriel des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}\\ &= u^i v^j \left(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right)\\ &= t^{ij} \left(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right)\end{aligned}$$

Le produit tensoriel de E_n par lui-même est noté $E_n \otimes E_n$ ou encore $E_n^{(2)}$. D'après l'axiome (3) p. 187, les vecteurs $\boldsymbol{\epsilon}_{ij} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ constituent une base de $E_n^{(2)}$.

20.3.5 Non commutativité du produit tensoriel

Le produit tensoriel d'un espace vectoriel E_n avec lui-même, $E_n \otimes E_n$, a pour vecteurs de base les produits tensoriels $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Par exemple, les vecteurs $(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)$ et $(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$ sont chacun des vecteurs de base, et ne peuvent donc pas être confondus. Le produit tensoriel des vecteurs $\mathbf{e}_i$ et $\mathbf{e}_j$ n'est donc pas commutatif. Il en va de même pour tout produit tensoriel de vecteurs.

EXEMPLE 20.3.2. *Soient* $\mathbf{u} = u^i\mathbf{e}_i$ *et* $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$ *deux vecteurs de l'espace vectoriel* E_2 *:*

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} &= u^i v^j \left(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right)\\ &= u^1 v^1 \left(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1\right) + u^1 v^2 \left(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2\right) + u^2 v^1 \left(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1\right) + u^2 v^2 \left(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2\right)\\ &= \mathbf{T}\left(u^1v^1, u^1v^2, u^2v^1, u^2v^2\right)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} &= v^j u^i \left(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i\right)\\ &= v^1 u^1 \left(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1\right) + v^1 u^2 \left(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2\right) + v^2 u^1 \left(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1\right) + v^2 u^2 \left(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2\right)\\ &= \mathbf{Z}\left(u^1v^1, u^2v^1, u^1v^2, u^2v^2\right)\end{aligned}$$

Par suite :

$$\boxed{\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \neq \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}}$$

20.3.6 Associativité du produit tensoriel

Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, trois vecteurs appartenant respectivement aux espaces vectoriels E_n, F_p, G_q. Nous pouvons multiplier tensoriellement l'élément $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ de $E_n \otimes F_p$ par le vecteur $\mathbf{w}$ de G_q. Nous obtenons alors l'élément $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}$ de l'espace vectoriel $H_{npq} = (E_n \otimes F_p) \otimes G_q$.

Nous posons comme nouvel axiome que le produit tensoriel des espaces vectoriels est associatif :

$$\begin{aligned} H_{npq} &= (E_n \otimes F_p) \otimes G_q \\ &= E_n \otimes F_p \otimes G_q \end{aligned}$$

Cela revient à poser l'associativité des vecteurs de base :

$$(\mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha) \otimes \boldsymbol{g}_\beta = \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha \otimes \boldsymbol{g}_\beta \tag{98}$$

Pour les éléments résultants, nous avons :

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = (u^i \mathbf{e}_i \otimes v^\alpha \boldsymbol{f}_\alpha) \otimes w^\beta \boldsymbol{g}_\beta$$

En utilisant le théorème 20.3.1 p. 188

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} &= \left(u^i v^\alpha \boldsymbol{\epsilon}_{i\alpha}\right) \otimes w^\beta \boldsymbol{g}_\beta \\ &= u^i v^\alpha w^\beta \boldsymbol{\epsilon}_{i\alpha} \otimes \boldsymbol{g}_\beta \\ &= u^i v^\alpha w^\beta \left(\mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha\right) \otimes \boldsymbol{g}_\beta \end{aligned}$$

et, en utilisant l'axiome (98) :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} &= u^i v^\alpha w^\beta \mathbf{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_\alpha \otimes \boldsymbol{g}_\beta \\ &= u^i \mathbf{e}_i \otimes \left(v^\alpha w^\beta \boldsymbol{f}_\alpha \otimes \boldsymbol{g}_\beta\right) \\ &= u^i \mathbf{e}_i \otimes \left(v^\alpha \boldsymbol{f}_\alpha \otimes w^\beta \boldsymbol{g}_\beta\right) \\ &= \mathbf{u} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) \end{aligned}$$

$$\boxed{(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}}$$

20.3.7 Produit tensoriel de plusieurs espaces

Étant donné un nombre fini r d'espaces vectoriels $E_n, F_p, G_q, \ldots$, la définition par récurrence du produit tensoriel de ces r espaces résulte du paragraphe précédent. D'après le paragraphe 20.3.3 p. 189, tout élément de $E_n \otimes F_p \otimes G_q \otimes \ldots$ n'étant pas nécessairement le produit tensoriel de r vecteurs appartenant respectivement à $E_n, F_p, G_q, \ldots$, nous sommes conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 20.3.4. *Tenseur*
On appelle tenseur construit sur les espaces de base $E_n, F_p, G_q, \dots$, tout élément de l'espace vectoriel $E_n \otimes F_p \otimes G_q \otimes \dots$

Soit $\mathbf{T}$ un tenseur « contravariant d'ordre p » et « covariant d'ordre q », et soit $\mathbf{U}$ un tenseur « contravariant d'ordre r » et « covariant d'ordre s ». Le produit tensoriel de ces deux tenseurs donne un tenseur $\mathbf{V}$ « contravariant d'ordre $p+r$ » et « covariant d'ordre $q+s$ » :

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} \otimes \mathbf{U} =& t^{i_1\, i_2 \dots i_p}_{j_1\, j_2 \dots j_q} \left(\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \mathbf{e}^{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_q}\right) \\
& \otimes u^{k_1\, k_2 \dots k_r}_{l_1\, l_2 \dots l_s} \left(\mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{k_r} \otimes \mathbf{e}^{l_1} \otimes \mathbf{e}^{l_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{l_s}\right) \\
=& t^{i_1\, i_2 \dots i_p}_{j_1\, j_2 \dots j_q}\, u^{k_1\, k_2 \dots k_r}_{l_1\, l_2 \dots l_s} \left(\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \mathbf{e}^{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_q}\right. \\
& \left. \otimes\, \mathbf{e}_{k_1} \otimes \mathbf{e}_{k_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{k_r} \otimes \mathbf{e}^{l_1} \otimes \mathbf{e}^{l_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{l_s}\right) \\
=& \mathbf{V}
\end{aligned}$$

REMARQUE 32. *Les tenseurs ont un ordre mais pas de variance. Parler d'un tenseur contravariant d'ordre p et covariant d'ordre q est un abus de langage pour parler d'un tenseur d'ordre $p+q$ dont p composantes sont contravariantes et q sont covariantes.*

20.4 PRODUIT SCALAIRE

20.4.1 Produit scalaire d'un produit tensoriel par un vecteur de base

DÉFINITION 20.4.1. *Produit scalaire d'un produit tensoriel par un vecteur de base*
Soient $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E_n. Le produit scalaire du produit tensoriel $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ par un vecteur de base $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ de $E_n^{(2)}$ s'écrit :

$$\forall i, j \quad (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \triangleq u_i v_j$$

Par conséquent :

$$\forall i, j \quad u^k v^l (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = u^k v^l g_{ki} g_{lj}$$

$$\forall i, j, k, l \quad (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = g_{ik} g_{jl} \tag{99}$$

EXEMPLE 20.4.1. *Soit $\{\mathbf{e}_1(2,0,0), \mathbf{e}_2(1,3,0), \mathbf{e}_3(1,1,1)\}$ une base de l'espace euclidien E_3. Déterminons les composantes du tenseur métrique de l'espace produit tensoriel $E_3 \otimes E_3$.*

Les vecteurs de base s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = (4,0,0,0,0,0,0,0,0) \\ \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 = (2,6,0,0,0,0,0,0,0) \\ \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 = (2,2,2,0,0,0,0,0,0) \\ \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 = (2,0,0,6,0,0,0,0,0) \\ \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 = (1,3,0,3,9,0,0,0,0) \\ \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 = (1,1,1,3,3,3,0,0,0) \\ \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 = (2,0,0,2,0,0,2,0,0) \\ \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 = (1,3,0,1,3,0,1,3,0) \\ \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 = (1,1,1,1,1,1,1,1,1) \end{cases}$$

Leur produit scalaire donne 81 *composantes dont voici les premières :*

$$\begin{cases} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) = 16 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3) = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = 40 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3) = 16 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) = 20 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) = 20 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) = 8 \end{cases} \quad \ldots$$

On retrouve le résultat précédent en utilisant la relation (99) *p. 192. Le tenseur métrique de* E_3 *a pour composantes :*

$$G \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) = g_{11}g_{11} = 16 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = g_{11}g_{12} = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3) = g_{11}g_{13} = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) = g_{12}g_{11} = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) = g_{12}g_{12} = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) = g_{12}g_{13} = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) = g_{13}g_{11} = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) = g_{13}g_{12} = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) = g_{13}g_{13} = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) = g_{11}g_{21} = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = g_{11}g_{22} = 40 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3) = g_{11}g_{23} = 16 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) = g_{12}g_{21} = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) = g_{12}g_{22} = 20 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) = g_{12}g_{23} = 8 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) = g_{13}g_{21} = 4 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) = g_{13}g_{22} = 20 \\ (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)\cdot(\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) = g_{13}g_{23} = 8 \end{cases} \quad \ldots$$

20.4.2 Composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux

NOTATION 19. *Si* $u_i = \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_i$, $v_j = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_j$, *et* $\mathbf{T} = \mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$ *alors*

$$\forall i,j \quad t_{ij} = u_i v_j$$

Pour tout tenseur $\mathbf{T} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ d'un espace vectoriel euclidien $E_n^{(2)}$, avec la relation (99) p. 192 et la défintion 20.4.1 p. 192, le produit scalaire de ce tenseur par un vecteur de base s'écrit :

$$\forall i, j \quad (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = (u^k \mathbf{e}_k \otimes v^l \mathbf{e}_l) \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$$
$$\forall i, j \quad u_i v_j = u^k v^l (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$$
$$\forall i, j \quad t_{ij} = t^{kl} g_{ki} g_{lj}$$

Les t_{ij} sont les composantes deux fois covariantes du tenseur d'ordre deux $\mathbf{T}$.

20.4.3 Produit scalaire de deux tenseurs contravariants d'ordre deux

Soient $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ deux tenseurs deux fois contravariants de l'espace vectoriel euclidien $E_n^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} &= \left[u^{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\right] \cdot \left[v^{kl} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)\right] \\
&= u^{ij} v^{kl} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \\
&= u^{ij} v^{kl} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l) \\
&= u^{ij} v^{kl} g_{ik} g_{jl} \\
&= u^{ij} v_{ij}
\end{aligned}$$

20.5 Base

20.5.1 Base duale d'un espace produit tensoriel

Soit $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^n)$ la base duale de la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de l'espace vectoriel E_n. D'après le paragraphe 20.3.4 p. 190 les vecteurs $\boldsymbol{\epsilon}_{ij} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ constituent une base de $E_n^{(2)}$. D'après le paragraphe 13.6 p. 117, les vecteurs $\mathbf{e}^j$ forment une base de E_n. Par conséquent, les vecteurs ${\boldsymbol{\epsilon}_i}^j = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$, les vecteurs ${\boldsymbol{\epsilon}^i}_j = \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j$, et les vecteurs $\boldsymbol{\epsilon}^{ij} = \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$, sont trois bases de $E_n^{(2)}$.

Remarque 33. *L'écriture $\boldsymbol{\epsilon}_i^j$ avec les indices l'un sous l'autre ne permet pas de distinguer $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$ de $\mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_i$. Or d'après le paragraphe 20.3.5 p. 190 le produit tensoriel n'est pas commutatif, $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \neq \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_i$, autrement dit ${\boldsymbol{\epsilon}_i}^j \neq {\boldsymbol{\epsilon}^j}_i$.*

20.5.2 Composantes mixtes

Soit $(\mathbf{e}^j)$ la base duale de la base $(\mathbf{e}_i)$. La décomposition du tenseur $\mathbf{T}$ sur la base mixte $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$ s'écrit :

$$\mathbf{T} = {t^i}_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$$

Les ${t^i}_j$ sont les composantes mixtes du tenseur $\mathbf{T}$, une fois contravariante et une fois covariante.

$$\mathbf{T} = {t^i}_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$$
$$t^{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = {t^i}_j g^{jk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$$
$$\forall i, k \quad t^{ik} = {t^i}_j g^{jk}$$

Notation 20. *D'après la notation 18 p. 184, l'ordre des indices compte. Par conséquent, en indices mixtes il faut garder cet ordre en décalant les indices :* ${t^i}_j \neq {t_j}^i$. *Cependant, si le tenseur est symétrique les composantes* ${t^i}_j$ *et* ${t_j}^i$ *sont égales, on les note alors simplement* t^i_j.

Exemple 20.5.1. *D'après (51) p. 102 :*

$$\begin{aligned}\forall i, j \quad g^i_j &= g^{ik} g_{kj} \\ &= \delta^i_j\end{aligned}$$

Les composantes mixtes g^i_j *sont donc identiques dans tous les systèmes de coordonnées. Quel que soit le tenseur* A *:*

$$\begin{aligned}A_i g^i_j &= A_j \\ A^i g^j_i &= A^j\end{aligned}$$

g^i_j *est un opérateur de substitution d'indice. Les trois ensembles de composantes* g^i_j, g^{ik}, g_{kj} *forment un groupe. Ils définissent le tenseur fondamental d'ordre deux* G.

20.5.3 Changement de base

Soient $(\mathbf{e}_i)$ et $(\mathbf{e}_{p'})$ deux bases d'un espace vectoriel E_n. Prenons le cas d'un espace tensoriel $E_n^{(3)}$ dont la base associée à $(\mathbf{e}_i)$ est $(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)$, et celle associée à $(\mathbf{e}_{p'})$ est $(\mathbf{e}_{q'} \otimes \mathbf{e}_{r'} \otimes \mathbf{e}_{s'})$. D'après (94) p. 185 :

$$\begin{cases} \forall j, k, l \quad \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \dfrac{\partial x^{q'}}{\partial x^j} \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^k} \dfrac{\partial x^{s'}}{\partial x^l} (\mathbf{e}_{q'} \otimes \mathbf{e}_{r'} \otimes \mathbf{e}_{s'}) \\ \forall q, r, s \quad \mathbf{e}_{q'} \otimes \mathbf{e}_{r'} \otimes \mathbf{e}_{s'} = \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{q'}} \dfrac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \dfrac{\partial x^l}{\partial x^{s'}} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \end{cases}$$

Soient $(\mathbf{e}^j)$ la base duale de $(\mathbf{e}_i)$, et soit $(\mathbf{e}^{q'})$ la base duale de $(\mathbf{e}_{p'})$. Le changement de base duale est donné par les relations (91) et (92) p. 180 :

$$\forall j \quad \mathbf{e}^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{q'}} \mathbf{e}^{q'} \qquad \textit{et} \qquad \forall q \quad \mathbf{e}^{q'} = \frac{\partial x^{q'}}{\partial x^j} \mathbf{e}^j$$

Soient $(\mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)$ et $\left(\mathbf{e}^{q'} \otimes \mathbf{e}_{r'} \otimes \mathbf{e}_{s'}\right)$ deux bases de $E_n^{(3)}$. Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} \forall j, k, l \quad \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{q'}} \dfrac{\partial x^{r'}}{\partial x^k} \dfrac{\partial x^{s'}}{\partial x^l} \left(\mathbf{e}^{q'} \otimes \mathbf{e}_{r'} \otimes \mathbf{e}_{s'}\right) \\ \forall q, r, s \quad \mathbf{e}^{q'} \otimes \mathbf{e}_{r'} \otimes \mathbf{e}_{s'} = \dfrac{\partial x^{q'}}{\partial x^j} \dfrac{\partial x^r}{\partial x^{r'}} \dfrac{\partial x^l}{\partial x^{s'}} \left(\mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l\right) \end{cases}$$

20.6 Transformation des composantes d'un tenseur

20.6.1 Transformation des composantes contravariantes

Soit $\mathbf{T}$ un tenseur de l'espace tensoriel $E_n^{(2)}$:

$$\begin{aligned} t^{i'j'}\left(\mathbf{e}_{i'}\otimes\mathbf{e}_{j'}\right) &= t^{pq}\left(\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q\right) \\ &= t^{pq}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}\left(\mathbf{e}_{i'}\otimes\mathbf{e}_{j'}\right) \\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}t^{pq} \qquad (100) \\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}t^{pq}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} \\ \mathbf{T}' &= J\mathbf{T}J^T \qquad (101) \end{aligned}$$

Les $t^{i'j'}$ sont appelées composantes contravariantes du tenseur $\mathbf{T}$. Les tenseurs deux fois contravariants généralisent à l'ordre deux les vecteurs ordinaires (contravariants).

Généralisons à un produit tensoriel d'espace supérieur à deux. Soit $\mathbf{T}$ un tenseur de l'espace tensoriel $E_n\otimes E_n\otimes E_n\otimes\dots$ tel que

$$\begin{aligned} t^{i'j'k'\dots}\left(\mathbf{e}_{i'}\otimes\mathbf{e}_{j'}\otimes\mathbf{e}_{k'}\otimes\dots\right) &= t^{pqr\dots}\left(\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q\otimes\mathbf{e}_r\otimes\dots\right) \\ &= t^{pqr\dots}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^r}\dots\left(\mathbf{e}_{i'}\otimes\mathbf{e}_{j'}\otimes\mathbf{e}_{k'}\otimes\dots\right) \\ \forall i,j,k,\dots \quad t^{i'j'k'\dots} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^r}\dots t^{pqr\dots} \end{aligned}$$

Inversement,

$$\begin{aligned} t^{pq}\left(\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q\right) &= t^{i'j'}\left(\mathbf{e}_{i'}\otimes\mathbf{e}_{j'}\right) \\ &= t^{i'j'}\frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\left(\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q\right) \\ \forall p,q \quad t^{pq} &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}t^{i'j'} \\ &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}t^{i'j'}\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \\ \mathbf{T} &= J^{-1}\mathbf{T}'\left(J^{-1}\right)^T \end{aligned}$$

On trouve cette relation directement à partir de (101) p 196 :

$$\begin{aligned} J^{-1}\mathbf{T}' &= J^{-1}J\mathbf{T}J^T \\ J^{-1}\mathbf{T}'\left(J^T\right)^{-1} &= \mathbf{T}J^T\left(J^T\right)^{-1} \\ &= \mathbf{T} \end{aligned}$$

En généralisant :

$$\forall p,q,r,\dots \quad t^{pqr\dots} = \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}}\dots t^{i'j'k'\dots}$$

Exemple 20.6.1. *Dans le système de coordonnées* (x^1, x^2)*, soit* $\mathbf{T}$ *un tenseur de composantes contravariantes* $(t^{11} = 1, t^{12} = 1, t^{21} = -1, t^{22} = 2)$*. Quelles sont ses composantes contravariantes* $t^{i'j'}$ *lors du changement de coordonnées :*

$$\begin{cases} x^{1'} = \left(x^2\right)^2 \\ x^{2'} = x^1 x^2 \end{cases}$$

(1) Méthode indicielle

$$\begin{aligned} t^{1'1'} &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} t^{11} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} t^{12} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} t^{21} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} t^{22} \\ &= 2x^2 \times 2x^2 \times t^{22} = 8\left(x^2\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{1'2'} &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} t^{11} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} t^{12} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} t^{21} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} t^{22} \\ &= 2x^2 \times x^2 \times t^{21} + 2x^2 \times x^1 \times t^{22} = -2\left(x^2\right)^2 + 4x^1x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{2'1'} &= \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} t^{11} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} t^{12} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} t^{21} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} t^{22} \\ &= x^2 \times 2x^2 \times t^{12} + x^1 \times 2x^2 \times t^{22} = 2\left(x^2\right)^2 + 4x^1x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{2'2'} &= \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} t^{11} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} t^{12} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} t^{21} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} t^{22} \\ &= x^2x^2 \times t^{11} + x^2x^1 \times t^{12} + x^1x^2 \times t^{21} + x^1x^1 \times t^{22} = \left(x^2\right)^2 + 2\left(x^1\right)^2 \end{aligned}$$

(2) Méthode matricielle

La relation (101) *p.* *196*, $\mathbf{T}' = J\mathbf{T}J^T$*, donne :*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} t^{1'1'} & t^{1'2'} \\ t^{2'1'} & t^{2'2'} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 2x^2 \\ x^2 & x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x^2 \\ 2x^2 & x^1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2x^2 & 4x^2 \\ x^2 - x^1 & x^2 + 2x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2x^2 \\ x^2 & x^1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8(x^2)^2 & -2(x^2)^2 + 4x^1x^2 \\ 2(x^2)^2 + 4x^1x^2 & (x^2)^2 + 2(x^1)^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Par exemple au point de coordonnées $(x^1 = 1, x^2 = -2)$*, le tenseur a pour composantes :*

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} 32 & -16 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

20.6.2 Transformation des composantes covariantes

Soit $\mathbf{T}$ un tenseur de l'espace tensoriel $E_n^{(2)}$ tel que

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}\cdot(\mathbf{e}_{i'}\otimes\mathbf{e}_{j'}) &= \mathbf{T}\cdot\left[\frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}(\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q)\right]\\
\forall i,j \quad t_{i'j'} &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\mathbf{T}\cdot(\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q)\\
&= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}t_{pq} \qquad (102)\\
&= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}t_{pq}\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\\
\mathbf{T}'_{cov} &= \left(J^{-1}\right)^T\mathbf{T}_{cov}J^{-1} \qquad (103)
\end{aligned}$$

Les $t_{i'j'}$ sont appelées composantes covariantes du tenseur $\mathbf{T}$. Les tenseurs deux fois covariants (les tenseurs d'ordre deux exprimés en composantes deux fois covariantes, voir la remarque 26 p. 107) généralisent à l'ordre deux les vecteurs de type gradient (qui sont exprimés en composantes covariantes).

On généralise à un produit tensoriel d'espace supérieur à deux. Soit $\mathbf{T}$ un tenseur de l'espace tensoriel $E_n\otimes E_n\otimes E_n\otimes\ldots$ tel que,

$$\begin{aligned}
\forall i,j,k,\ldots \quad t_{i'j'k'\ldots} &= \mathbf{T}\cdot(\mathbf{e}_{i'}\otimes\mathbf{e}_{j'}\otimes\mathbf{e}_{k'}\otimes\ldots)\\
&= \mathbf{T}\cdot\left[\frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}}\ldots(\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q\otimes\mathbf{e}_r\otimes\ldots)\right]\\
&= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}}TT\ldots T\cdot(\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q\otimes\mathbf{e}_r\otimes\ldots)\\
&= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}}\ldots t_{pqr\ldots}
\end{aligned}$$

Inversement :

$$\begin{aligned}
\forall p,q \quad t_{pq} &= \mathbf{T}\cdot(\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q)\\
&= \mathbf{T}\cdot\left[\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}(\mathbf{e}_{i'}\otimes\mathbf{e}_{j'})\right]\\
&= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}\mathbf{T}\cdot(\mathbf{e}_{i'}\otimes\mathbf{e}_{j'})\\
&= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}t_{i'j'}\\
&= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p}t_{i'j'}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q}\\
\mathbf{T}_{cov} &= J^T\mathbf{T}'_{cov}J
\end{aligned}$$

On trouve cette relation directement à partir de (103) p. 198 :

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}'_{cov}J &= \left(J^{-1}\right)^T\mathbf{T}_{cov}J^{-1}J\\
J^T\mathbf{T}'_{cov}J &= J^T\left(J^{-1}\right)^T\mathbf{T}_{cov}\\
&= \mathbf{T}_{cov}
\end{aligned}$$

En généralisant :

$$\forall p, q, r, \ldots \quad t_{pqr\ldots} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^r} \ldots t_{i'j'k'\ldots}$$

Pour le tenseur métrique :

$$G = J^T G' J$$

En particulier si le nouveau système de coordonnées (primé) est rectangulaire alors $G' = I$ et dans l'ancien système de coordonnées le tenseur métrique s'écrit :

$$G = J^T J \tag{104}$$

20.6.3 Transformation des composantes mixtes

Soit $\mathbf{T}$ un tenseur de l'espace tensoriel $E_n^{(2)}$ tel que,

$$\begin{aligned}
t_{i'}{}^{j'} \left(\mathbf{e}^{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'}\right) &= t_p{}^q \left(\mathbf{e}^p \otimes \mathbf{e}_q\right) \\
&= t_p{}^q \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} \left(\mathbf{e}^{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'}\right) \\
\forall i, j \quad t_{i'}{}^{j'} &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} t_p{}^q \qquad (105) \\
&= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} t_p{}^q \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} \\
\mathbf{T}' &= \left(J^{-1}\right)^T \mathbf{T} J^T \qquad (106)
\end{aligned}$$

Les $t_i{}^{j'}$ sont appelées composantes mixtes du tenseur $\mathbf{T}$. On généralise à un produit tensoriel d'espace supérieur à deux. Soit $\mathbf{T}$ un tenseur de l'espace tensoriel $E_n \otimes E_n \otimes E_n \otimes \ldots$ tel que,

$$\begin{aligned}
t_{i'_1 i'_2 \ldots}{}^{j'_1 j'_2 \ldots} \left(\mathbf{e}^{i'_1} \otimes \mathbf{e}^{i'_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j'_1} \otimes \mathbf{e}_{j'_2} \otimes \ldots\right) &= t_{p_1 p_2 \ldots}{}^{q_1 q_2 \ldots} \left(\mathbf{e}^{p_1} \otimes \mathbf{e}^{p_2} \otimes ee \ldots e_{q_1} \otimes \mathbf{e}_{q_2} \ldots\right) \\
&= t_{p_1 p_2 \ldots}{}^{q_1 q_2 \ldots} \frac{\partial x^{p_1}}{\partial x^{i'_1}} \frac{\partial x^{p_2}}{\partial x^{i'_2}} \ldots \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{q_1}} \frac{\partial x^{j'_2}}{\partial x^{q_2}} \ldots \left(\mathbf{e}^{i'_1} \otimes \mathbf{e}^{i'_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j'_1} \otimes \mathbf{e}_{j'_2} \otimes \ldots\right) \\
t_{i'_1 i'_2 \ldots}{}^{j'_1 j'_2 \ldots} &= \frac{\partial x^{p_1}}{\partial x^{i'_1}} \frac{\partial x^{p_2}}{\partial x^{i'_2}} \ldots \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{q_1}} \frac{\partial x^{j'_2}}{\partial x^{q_2}} \ldots t_{p_1 p_2 \ldots}{}^{q_1 q_2 \ldots}
\end{aligned}$$

Les indices i' et j' étant muets

$$t_{i'}{}^{j'} \left(\mathbf{e}^{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'}\right) = t_{j'}{}^{i'} \left(\mathbf{e}^{j'} \otimes \mathbf{e}_{i'}\right)$$

En revanche, $t^{i'}{}_{j'} \left(\mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}^{j'}\right)$ est la transposée de $t_{i'}{}^{j'} \left(\mathbf{e}^{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'}\right)$ (la notion de transposée n'a pas de sens pour les tenseurs d'ordre supérieur à deux) :

$$\begin{aligned}
t^{i'}{}_{j'} \left(\mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}^{j'}\right) &= t^p{}_q \left(\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}^q\right) \\
&= t^p{}_q \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \left(\mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}^{j'}\right) \\
\forall i, j \quad t^{i'}{}_{j'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} t^p{}_q \\
&= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} t^p{}_q \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \\
\mathbf{T}'^T &= J \mathbf{T}^T J^{-1}
\end{aligned}$$

On obtient directement le résultat en prenant la transposé de la relation (106) p. 199 :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}'^T &= \left[\left(J^{-1}\right)^T \mathbf{T} J^T\right]^T \\ &= \left(\mathbf{T} J^T\right)^T J^{-1} \\ &= J \mathbf{T}^T J^{-1}\end{aligned}$$

Inversement,

$$\begin{aligned}t_p{}^q \left(\mathbf{e}^p \otimes \mathbf{e}_q\right) &= t_{i'}{}^{j'} \left(\mathbf{e}^{i'} \otimes \mathbf{e}_{j'}\right) \\ &= t_{i'}{}^{j'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \left(\mathbf{e}^p \otimes \mathbf{e}_q\right) \\ \forall p, q \quad t_p{}^q &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} t_{i'}{}^{j'} \\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} t_{i'}{}^{j'} \frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}} \\ \mathbf{T} &= J^T \mathbf{T}' \left(J^{-1}\right)^T\end{aligned}$$

La transposée s'écrit,

$$\begin{aligned}t^p{}_q \left(\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}^q\right) &= t^{i'}{}_{j'} \left(\mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{e}^{j'}\right) \\ &= t^{i'}{}_{j'} \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} \left(\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}^q\right) \\ \forall p, q \quad t^p{}_q &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} t^{i'}{}_{j'} \\ &= \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} t^{i'}{}_{j'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^q} \\ \mathbf{T}^T &= J^{-1} \left(\mathbf{T}'\right)^T J\end{aligned}$$

En généralisant :

$$\forall p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots \quad t_{p_1 p_2 \dots}{}^{q_1 q_2 \dots} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{p_1}} \frac{\partial x^{i'_2}}{\partial x^{p_2}} \dots \frac{\partial x^{q_1}}{\partial x^{j'_1}} \frac{\partial x^{q_2}}{\partial x^{j'_2}} \dots t_{i'_1 i'_2 \dots}{}^{j'_1 j'_2 \dots}$$

20.6.4 Exemples

Exemple 20.6.2. *À partir du changement de coordonnées sphériques en rectangulaires, cherchons l'expression du tenseur métrique euclidien en coordonnées sphériques.*

$$\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\phi) \qquad r \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \theta < \pi, \qquad 0 \leqslant \phi < 2\pi \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$$

D'après la relation (104) *p.* *199*,

$$
\begin{aligned}
G &= J^T J \\
&= \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\phi & r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Exemple 20.6.3. *Soit le système de coordonnées* (x^1, x^2), *défini à partir des coordonnées rectangulaires* $(x^{1'}, x^{2'})$ *:*

$$
\begin{cases} x^1 = x^{1'} \\ x^2 = \exp\left(x^{2'} - x^{1'}\right) \end{cases}
$$

Cherchons l'expression du tenseur métrique euclidien dans ce système de coordonnées. Nous devons inverser le système d'équations pour avoir la matrice jacobienne de la transformation $x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2)$ *:*

$$
\begin{cases} x^{1'} = x^1 \\ x^{2'} = x^1 + \ln x^2 \end{cases} \tag{107}
$$

D'après la relation (104) *p.* *199*,

$$
\begin{aligned}
G &= J^T J \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & (x^2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & (x^2)^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & (x^2)^{-1} \\ (x^2)^{-1} & (x^2)^{-2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Calculons la longueur de la courbe :

$$
\mathscr{C}(\lambda) \quad : \quad \begin{cases} x^1 = 3\lambda \\ x^2 = e^\lambda \end{cases} \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 2)
$$

Le carré de la dérivée de la distance élémentaire s'écrit :

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 &= g_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda} \\
&= 2\left(\frac{dx^1}{d\lambda}\right)^2 + 2\left(x^2\right)^{-1}\frac{dx^1}{d\lambda}\frac{dx^2}{d\lambda} + \left(x^2\right)^{-2}\left(\frac{dx^2}{d\lambda}\right)^2 \\
&= 2 \times 9 + 2e^{-\lambda} \times 3e^\lambda + e^{-2\lambda}e^{2\lambda} \\
&= 25
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2}\, d\lambda &= 5\int_0^2 d\lambda \\
\Gamma &= 10
\end{aligned}
$$

Nous pouvons effectuer le même calcul en coordonnées rectangulaires. En nous servant du changement de variable (107), l'équation de la courbe devient en coordonnées rectangulaires $(x^{1'}, x^{2'})$,

$$\mathscr{C}(\lambda) \quad : \quad \begin{cases} x^{1'} = 3\lambda \\ x^{2'} = 3\lambda + \lambda = 4\lambda \end{cases} \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 2)$$

C'est l'équation de la droite

$$x^{2'} = \tfrac{4}{3}\, x^{1'}$$

qui passe au point $(0, 0)$ *en* $\lambda = 0$*, et au point* $(6, 8)$ *en* $\lambda = 2$*. La distance entre ces points vaut* $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

20.7 Définition d'un tenseur

Au paragraphe 20.5.3 p. 195, nous avons vu comment se transforment les composantes d'un tenseur lors d'un changement de base.

Réciproquement, donnons nous n^3 quantités que nous rattachons à une base $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$. Si, lors d'un changement de base, vers une nouvelle base $\mathbf{e}_{p'} \otimes \mathbf{e}_{q'} \otimes \mathbf{e}_{r'}$, les n^3 quantités se transforment selon les formules (100), alors on peut faire correspondre un tenseur à ces n^3 quantités, dont elles constituent les composantes contravariantes. De même, si les n^3 quantités se transforment selon les formules (102) ou (105) alors elles constituent respectivement les composantes covariantes ou mixtes d'un tenseur. Ce résultat se généralise à n^p quantités. Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 20.7.1. *Pour que* n^p *quantités rapportées à une base d'un espace vectoriel* $E_n^{(p)}$ *soient les composantes d'un tenseur, il faut et il suffit que ces quantités se transforment par changement de base selon les formules du paragraphe 20.5.3 p. 195.*

Exemple 20.7.1. *Soit* E *un invariant par changement de base.*

$$\begin{aligned} E' &= E \\ \forall i \quad \frac{\partial E'}{\partial x^{i'}} &= \frac{\partial E}{\partial x^{i'}} \\ &= \frac{\partial E}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \end{aligned}$$

Les invariants sont des tenseur.

Exemple 20.7.2. *Soit* $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ *une fonction dérivable par rapport aux* n *coordonnées* x^i*. Montrons que les dérivées partielles de* f *sont les composantes d'un tenseur d'ordre un.*

Soit la transformation de coordonnées $x^{i'}(x^1, x^2, \ldots x^n)$ et soit $x^i(x^{1'}, x^{2'}, \ldots x^{n'})$ la transformation inverse. La dérivation partielle de f s'écrit :

$$\forall i \quad \partial_{i'} f = \frac{\partial x^j}{\partial x_{i'}} \, \partial_j f$$

D'après les relations (83) *p. 168, les dérivées partielles se transforment comme les vecteurs de la base naturelle. Ce sont donc les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre un, justifiant la notation $\partial_i f$ et $f_{,i}$ avec l'indice en bas.*

Exemple 20.7.3. *Soit* $\mathbf{u}$ *un vecteur de composantes covariantes u_i. Montrons que les dérivées partielles $\partial_j u_i$ des composantes covariantes ne sont pas les composantes d'un tenseur. Les composantes covariantes d'un vecteur se transforment selon les relations* (89) *p. 172,*

$$\forall i \quad u_i = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \, u_{k'}$$

La dérivation partielle de cette expression nous donne :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad \partial_j u_i &= \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i} \, u_{k'} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \, \partial_j u_{k'} \\ &= \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i} \, u_{k'} + \frac{\partial x^{k'} \partial x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j} \, \partial_{l'} u_{k'} \end{aligned}$$

Le premier terme est nul si les coordonnées $x^{k'}$ sont des fonctions affines des coordonnées x^j, c'est-à-dire si x^j et $x^{k'}$ sont des coordonnées rectilignes. Pour autant, pour être un tenseur la loi de transformation des composantes doit être valable quel que soit le changement de coordonnées.

Exemple 20.7.4. *Montrons que les différentielles des composantes covariantes du_i ne sont pas les composantes d'un tenseur :*

$$\forall i \quad u_i = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \, u_{k'}$$

$$du_i = d\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\right) u_{k'} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \, du_{k'}$$

Le premier terme est nul si les coordonnées $x^{k'}$ sont des fonctions affines des coordonnées x^j, c'est-à-dire si x^j et $x^{k'}$ sont des coordonnées rectilignes. Pour autant, pour être un tenseur la loi de transformation des composantes doit être valable quel que soit le changement de coordonnées.

Exemple 20.7.5. *Déterminons les formules de transformation du rotationnel d'un vecteur lors d'un changement de coordonnées curvilignes.*

$$\begin{aligned}\forall i,j \quad \mathbf{rot}_{ij}\,\mathbf{u} &= \partial_j u_i - \partial_i u_j \\ &= \left(\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i}\, u_{k'} + \frac{\partial x^{k'} \partial x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j}\, \partial_{l'} u_{k'}\right) - \left(\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j}\, u_{k'} + \frac{\partial x^{k'} \partial x^{l'}}{\partial x^j \partial x^i}\, \partial_{l'} u_{k'}\right)\end{aligned}$$

où les indices k et l sont muets. Or

$$\forall i,j,k \quad \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j}$$

donc :

$$\begin{aligned}\forall i,j \quad \mathbf{rot}_{ij}\,\mathbf{u} &= \frac{\partial x^{k'} \partial x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j}\, \partial_{l'} u_{k'} - \frac{\partial x^{m'} \partial x^{n'}}{\partial x^j \partial x^i}\, \partial_{n'} u_{m'} \\ &= \frac{\partial x^{k'} \partial x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j}\, \partial_{l'} u_{k'} - \frac{\partial x^{l'} \partial x^{k'}}{\partial x^j \partial x^i}\, \partial_{k'} u_{l'} \\ \partial_j u_i - \partial_i u_j &= \frac{\partial x^{k'} \partial x^{l'}}{\partial x^i \partial x^j}\, (\partial_{l'} u_{k'} - \partial_{k'} u_{l'})\end{aligned}$$

C'est la formule de transformation des composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux.

Examinons l'autre possibilité pour l'expression du rotationnel. Supposons $\mathbf{u}$ *de composantes contravariantes u^i. Dans la base naturelle :*

$$\begin{aligned}\forall i \quad u^i &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\, u^{k'} \\ \forall i,j \quad \partial_j u^i &= \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^{k'}}\, u^{k'} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\, \partial_j u^{k'} \\ &= \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^{k'}}\, u^{k'} + \frac{\partial x^i \partial x^{l'}}{\partial x^{k'} \partial x^j}\, \partial_{l'} u^{k'}\end{aligned}$$

$$\forall i,j \quad \partial_j u^i - \partial_i u^j = \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^{k'}}\, u^{k'} + \frac{\partial x^i \partial x^{l'}}{\partial x^{k'} \partial x^j}\, \partial_{l'} u^{k'}\right) - \left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^i \partial x^{k'}}\, u^{k'} + \frac{\partial x^j \partial x^{l'}}{\partial x^{k'} \partial x^i}\, \partial_{l'} u^{k'}\right)$$

Ce ne sont pas les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux car

$$\forall i \neq j \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \neq \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \qquad \Rightarrow \qquad \forall i \neq j \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^{k'}} \neq \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^i \partial x^{k'}}$$

20.8 Le tenseur métrique

À partir de la définition du tenseur métrique 12.1.1 p. 97 :

$$\begin{aligned}\forall i,j \quad g_{ij} &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \\ &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\, \mathbf{e}_{k'} \cdot \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j}\, \mathbf{e}_{l'} \\ &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\, \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j}\, \mathbf{e}_{k'} \cdot \mathbf{e}_{l'} \\ &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\, \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j}\, g_{k'l'} \qquad (108)\end{aligned}$$

Les g_{ij} sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux. Cette condition est nécessaire et suffisante pour que la forme quadratique associée à la matrice G soit invariante par changement de coordonnées. En effet :

$$\forall i,j \quad g_{i'j'} = g_{pq}\,\frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}$$

et l'on a :

$$\begin{aligned} g_{i'j'}\,dx^{i'}dx^{j'} &= g_{pq}\,\frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^q}{\partial x^{j'}}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^r}\,dx^r\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^s}\,dx^s \\ &= g_{pq}\,\delta^p_r\delta^q_s\,dx^r dx^s \\ &= g_{pq}\,dx^p dx^q \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \forall i,j \quad g^{ij} &= \mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}^j \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\,\mathbf{e}^{k'}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\,\mathbf{e}^{l'} \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\,\mathbf{e}^{k'}\cdot\mathbf{e}^{l'} \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\,g^{k'l'} \end{aligned}$$

Les g^{ij} sont les composantes d'un tenseur deux fois contravariant. Formons le déterminant des matrices figurant de part et d'autre de cette égalité :

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} &= J^2\frac{1}{g'} \\ g' &= J^2 g \end{aligned} \tag{109}$$

EXEMPLE 20.8.1. *Soit le changement de base d'un espace vectoriel E_2 défini par :*

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_{2'} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

Déterminons les nouvelles composantes du tenseur métrique $g_{k'l'}$ en fonction des anciennes g_{ij}.

(1) En partant de la définition du tenseur métrique :

$$g_{k'l'} = \mathbf{e}_{k'}\cdot\mathbf{e}_{l'}$$

$$\begin{cases} g_{1'1'} = (3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)\cdot(3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2) \\ g_{1'2'} = (3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)\cdot(-\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2) \\ g_{2'1'} = (-\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2)\cdot(3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2) \\ g_{2'2'} = (-\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2)\cdot(-\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{1'1'} = 9g_{11}+6g_{12}+g_{22} \\ g_{1'2'} = -3g_{11}+5g_{12}+2g_{22} \\ g_{2'1'} = -3g_{11}+5g_{12}+2g_{22} \\ g_{2'2'} = g_{11}-4g_{12}+4g_{22} \end{cases}$$

(2) En utilisant la formule de changement de base d'un tenseur d'ordre deux :

$$\forall k,l \quad g_{k'l'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\,g_{ij}$$

Pour déterminer les $\partial x^i/\partial x^{k'}$ on utilise les relations (80) *p.* *166* *:*

$$\forall k \quad \mathbf{e}_{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\,\mathbf{e}_i$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = A^1_{\ 1'}\mathbf{e}_1 + A^2_{\ 1'}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_{2'} = A^1_{\ 2'}\mathbf{e}_1 + A^{2'}_{\ \ 2}\mathbf{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \quad A^1_{\ 1'} = 3 \ ; \ A^2_{\ 1'} = 1 \ ; \ A^1_{\ 2'} = -1 \ ; \ A^{2'}_{\ \ 2} = 2$$

$$\begin{cases} g_{1'1'} = A^1_{\ 1'}A^1_{\ 1'}g_{11} + A^2_{\ 1'}A^1_{\ 1'}g_{21} + A^1_{\ 1'}A^2_{\ 1'}g_{12} + A^2_{\ 1'}A^2_{\ 1'}g_{22} \\ g_{1'2'} = A^1_{\ 1'}A^1_{\ 2'}g_{11} + A^2_{\ 1'}A^1_{\ 2'}g_{21} + A^1_{\ 1'}A^{2'}_{\ \ 2}g_{12} + A^2_{\ 1'}A^{2'}_{\ \ 2}g_{22} \\ g_{2'1'} = A^1_{\ 2'}A^1_{\ 1'}g_{11} + A^{2'}_{\ \ 2}A^1_{\ 1'}g_{21} + A^1_{\ 2'}A^2_{\ 1'}g_{12} + A^{2'}_{\ \ 2}A^2_{\ 1'}g_{22} \\ g_{2'2'} = A^1_{\ 2'}A^1_{\ 2'}g_{11} + A^{2'}_{\ \ 2}A^1_{\ 2'}g_{21} + A^1_{\ 2'}A^{2'}_{\ \ 2}g_{12} + A^{2'}_{\ \ 2}A^{2'}_{\ \ 2}g_{22} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_{1'1'} = 9g_{11} + 6g_{12} + g_{22} \\ g_{1'2'} = -3g_{11} + 5g_{12} + 2g_{22} \\ g_{2'1'} = -3g_{11} + 5g_{12} + 2g_{22} \\ g_{2'2'} = g_{11} - 4g_{12} + 4g_{22} \end{cases}$$

20.9 Opérations sur les tenseurs

20.9.1 Addition de deux tenseurs

Pour être additionnés, les tenseurs doivent être du même ordre et être rapportés à une même base (leurs composantes ont alors même variance). Dans un espace vectoriel $E_n^{(2)}$, soient $\mathbf{U} = u^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ et $\mathbf{V} = v^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ deux tenseurs d'ordre deux. L'addition tensorielle leur fait correspondre le tenseur de même ordre $\mathbf{T}$ de $E_n^{(2)}$, tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{U} + \mathbf{V} \\ t^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j &= u^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + v^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ &= \left(u^{ij} + v^{ij}\right)\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ \forall i,j \quad t^{ij} &= u^{ij} + v^{ij} \end{aligned}$$

L'addition des tenseurs a les propriétés suivantes :

a) Commutativité : $\forall i,j \quad u^{ij} + v^{ij} = v^{ij} + u^{ij}$

b) Associativité : $\forall i,j \quad u^{ij} + (v^{ij} + w^{ij}) = (u^{ij} + v^{ij}) + w^{ij} = u^{ij} + v^{ij} + w^{ij}$

c) Il existe un tenseur nul $\mathbf{N}$ tel que $\forall i,j \quad n^{ij} = 0$, et tel que $\forall \mathbf{T},\ \mathbf{T} + \mathbf{N} = \mathbf{T}$

d) Quel que soit $\mathbf{U}$ un tenseur, il existe un tenseur $\mathbf{V}$, appelé *opposé* de $\mathbf{U}$, tel que : $\forall i,j \quad u^{ij} + v^{ij} = 0$ c'est-à-dire $\forall i,j \quad v^{ij} = -u^{ij}$. $\mathbf{V}$ est noté $-\mathbf{U}$.

20.9.2 Multiplication d'un tenseur par un scalaire

Dans un espace vectoriel $E_n^{(2)}$, soient λ et μ deux scalaires, et soit $\mathbf{U} = u^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ un tenseur d'ordre deux. La multiplication du tenseur $\mathbf{U}$ par le scalaire λ fait correspondre le tenseur de même ordre $\mathbf{V}$ de $E_n^{(2)}$, tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \lambda\,\mathbf{U} \\ v^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j &= \lambda\,u^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ \forall i,j \quad v^{ij} &= \lambda\,u^{ij} \end{aligned}$$

La multiplicaton par un scalaire a les propriétés suivantes :

a) Associativité : $\forall i,j \quad \lambda\,(\mu\, u^{ij}) = (\lambda\, \mu)\, u^{ij}$

b) Distributivité par rapport à l'addition des scalaires : $\forall i,j \quad (\lambda + \mu)\, u^{ij} = \lambda\, u^{ij} + \mu\, u^{ij}$

c) Distributivité par rapport à l'addition tensorielle : $\forall i,j \quad \lambda\,(u^{ij} + v^{ij}) = \lambda\, u^{ij} + \lambda\, v^{ij}$

d) Il existe un élément neutre : $\forall i,j \quad 1 \times u^{ij} = u^{ij}$

20.9.3 Combinaison linéaire de tenseurs

Soient u^{ij} et v^{ij} les composantes deux fois contravariantes de deux tenseurs. Soit t^{ij} leur combinaison linéaire :

$$\forall i,j \quad t^{ij} = u^{ij} + \lambda v^{ij}$$

Par changement de base :

$$\begin{aligned}\forall i,j \quad t^{ij} &= \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}\,u^{k'l'}\right) + \lambda\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}\,v^{k'l'}\right)\\ &= \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}\right)\left(u^{k'l'} + \lambda v^{k'l'}\right)\\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}\,t^{k'l'}\end{aligned}$$

D'après le théorème 20.7.1 p. 202, les quantités t^{ij} constituent les composantes deux fois contravariantes d'un tenseur. La combinaison linéaire de deux tenseurs du même ordre donne un tenseur du même ordre.

Exemple 20.9.1. *Soit t^{ij} un tenseur, montrer que $t^{ij} - t^{ji}$ est également un tenseur. Commençons par montrer que si t^{ij} est un tenseur deux fois contravariant alors sa transposée t^{ji} est aussi un tenseur deux fois contravariant :*

$$\forall i,j \quad t^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\,\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^l}\,t^{kl} \quad \Rightarrow \quad \forall i,j \quad t^{j'i'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l}\,t^{kl}$$

Par conséquent t^{ji} est un tenseur deux fois covariant, ainsi que $t^{ij} - t^{ji}$ d'après le paragraphe 20.9.1 p. 206.

Exemple 20.9.2. *Soit* $\mathbf{T}$ *un tenseur mixte, montrons que sa transposée est un tenseur. Les composantes mixtes de* $\mathbf{T}$ *se transforment par changement de base selon :*

$$\forall i,j \quad t^{i'}{}_{j'} = t^i{}_j\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \quad \Rightarrow \quad \forall i,j \quad t^{j'}{}_{i'} = t^j{}_i\,\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}$$

Par conséquent $\mathbf{T}^T$ *est un tenseur.*

20.9.4 Classification des tenseurs

L'addition tensorielle et la multiplication par un scalaire sont des lois de composition de $E_n^{(2)}$ dans $E_n^{(2)}$. Les tenseurs suivent donc la définition 3.1.2 p. 15 d'un espace vectoriel, et sont par conséquent des vecteurs d'un espace vectoriel $H_{n,p,q,\dots}$ muni d'une structure de produit tensoriel. Les espaces produits tensoriels deviennent pré-euclidiens lorsqu'on les munit d'un produit scalaire.

Afin d'unifier la classification, les espaces élémentaires $E^{(1)}$ non munis d'une structure de produit tensoriel ont pour éléments des tenseurs d'ordre un, que l'on appellera vecteurs. Comme vu précédemment, les tenseurs d'ordre zéro sont appelés des scalaires.

20.9.5 Multiplication tensorielle

Les produits tensoriels d'espaces vectoriels sont des espaces vectoriels. Ils peuvent à leur tour former de nouveaux espaces vectoriels par multiplication tensorielle.

Soit $\mathbf{U} = u^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ un tenseur de $E_n^{(2)}$, et soit $\mathbf{V} = v^{ijk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$ un tenseur de $E_n^{(3)}$. La multiplication tensorielle leur fait correspondre le tenseur $\mathbf{T}$ d'ordre cinq, de l'espace $E_n^{(5)} = E_n^{(2)} \otimes E_n^{(3)}$, tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{U} \otimes \mathbf{V} \\ t^{ijklm}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m &= (u^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \otimes (v^{klm}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m) \\ &= u^{ij}\, v^{klm}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m) \\ \forall i, j, k, l, m \quad t^{ijklm} &= u^{ij} v^{klm} \end{aligned}$$

Notation 21. *Le produit tensoriel est aussi noté :*

$$\mathbf{T} = [\mathbf{U}\mathbf{V}]$$

20.9.6 Contraction des indices

La contraction des indices d'un tenseur consiste à égaler l'un de ses indices contravariants avec l'un de ses indices covariants. À partir d'un tenseur mixte d'ordre q, elle permet d'obtenir de nouveaux tenseurs d'ordre $q-2$, le tenseur initial étant amputé d'une covariance et d'une contravariance.

> Exemple 20.9.3. *Soient* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$ *deux vecteurs de* E_n *de composantes contravariantes* u^i *et* v_j, *et soit* $\mathbf{T}$ *leur produit tensoriel :*
>
> $$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \\ t^i_j(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j) &= u^i\mathbf{e}_i \otimes v_j\mathbf{e}^j \\ \forall i, j \quad t^i_j &= u^i v_j \end{aligned}$$
>
> *En posant* $i = j$ *nous additionnons les composantes et formons le produit scalaire des vecteurs* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$ *:*
>
> $$\begin{aligned} \forall i \quad t^i_i &= u^i v_i \\ &= t^1_1 + t^2_2 + t^3_3 + \dots \end{aligned}$$
>
> *L'opération de contraction des indices fait passer un tenseur mixte d'ordre deux à un scalaire ou tenseur d'ordre zéro. Par contraction répétée des indices d'un tenseur d'ordre pair on déduit donc un invariant.*

Exemple 20.9.4. *Soit* $\mathbf{U}$ *un tenseur d'ordre trois de composantes mixtes* ${u^{ij}}_k$. *La contraction des indices* j *et* k *donne les quantités suivantes :*

$$\forall i \quad {u^{ij}}_j = v^i$$

Par exemple $v^1 = {u^{11}}_1 + {u^{12}}_2 + {u^{13}}_3$. *Montrons qu'elles constituent les composantes d'un vecteur. Par changement de base :*

$$\begin{aligned}
\forall i \quad {u^{ij}}_j &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^j} {u^{k'm'}}_{n'} \\
&= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \delta^{n'}_{m'} {u^{k'm'}}_{n'} \\
&= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} {u^{k'm'}}_{m'} \\
\forall i \quad v^i &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} v^{k'}
\end{aligned}$$

Les v^i *se transforment comme les composantes contravariantes d'un tenseur. L'opération de contraction des indices fait passer un tenseur mixte d'ordre trois à un vecteur ou tenseur d'ordre un.*

20.9.7 Multiplication contractée

Définition 20.9.1. *Multiplication contractée*
La multiplication tensorielle suivie de la contraction des indices s'appelle la multiplication contractée ou multiplication mixte.

En particulier, appliquée à deux tenseurs du premier ordre de variances différentes, elle donne un invariant $u_i v^i$ appelé *produit intérieur* de $\mathbf{U}$ par $\mathbf{V}$, analogue du produit scalaire du calcul vectoriel. (voir l'exemple 18.1.5 p. 155).

Notation 22. *La multiplication contractée de* $\mathbf{U}$ *par* $\mathbf{V}$ *est notée :*

$$\mathbf{T} = \mathbf{UV}$$

Elle donne un critère de tensorialité.

(1) Si

$$u_i v^i = E$$

est un invariant pour tout vecteur de composantes contravariantes v^i, alors les u_i sont les composantes covariantes d'un vecteur (tenseur d'ordre un). En effet, E étant un invariant,

$$\begin{aligned}
E &= E' \\
u_i v^i &= u_{j'} v^{j'} \\
&= u_{j'} v^k \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} \\
&= u_{j'} v^i \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

relation vraie quelles que soient les v^i, donc :

$$\forall i \quad u_i = u_{j'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}$$

(2) Si les

$$\forall j \quad t_{ij} u^i = v_j$$

sont les composantes covariantes d'un vecteur pour tout vecteur de composantes contravariantes u^i, alors les t_{ij} sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux. En effet,

$$\begin{aligned}
\forall j \quad v_{j'} &= v_k \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \\
\forall j \quad t'_{ij} u^{i'} &= t_{lk} u^l \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \\
&= t_{lk} u^{m'} \frac{\partial x^l}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \\
&= t_{lk} u^{i'} \frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \\
\forall i, j \quad t'_{ij} &= t_{lk} \frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}}
\end{aligned}$$

Les composantes covariantes t'_{ij} sont notées $t_{i'j'}$.

(3) Si

$$t_{ij} u^i v^j = E$$

est un invariant pour tous vecteurs contravariants u^i et v^i, alors les t_{ij} sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux. En effet, d'après (1), les $t_{ij} u^i$ sont les composantes covariantes d'un vecteur, et par conséquent d'après (2) les t_{ij} sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux.

(4) Si les t_{ij} sont symétriques et si

$$t_{ij} v^i v^j = E$$

est un invariant pour tout vecteur de composantes contravariantes v^i, alors les t_{ij} sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux. En effet, soit u^i les composantes contravariantes d'un autre vecteur, alors $w^i = u^i + v^i$ est aussi un vecteur contravariant. Alors,

$$\begin{aligned}
t_{ij} w^i w^j &= t_{ij} \left(u^i + v^i\right) \left(u^j + v^j\right) \\
&= t_{ij} u^i u^j + t_{ij} v^i u^j + t_{ij} u^i v^j + t_{ij} v^i v^j \\
&= t_{ij} u^i u^j + t_{ij} v^i v^j + 2 t_{ij} u^i v^j
\end{aligned}$$

où le terme de gauche et les deux premiers termes de droite sont des invariants par hypothèse. Par conséquent $t_{ij} u^i v^j$ doit aussi être un invariant, et d'après (3), les t_{ij} sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux.

La généralisation des exemples (1), (2) et (3) permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 20.9.1. *Critère général de tensorialité*

Si le produit contracté d'une suite de quantités avec un tenseur donne un tenseur alors cette suite de quantités constitue les composantes d'un tenseur.

Exemple 20.9.5. *Reprenons l'exemple* 20.7.2 *p.* 202. *Soit* $f(v^1, v^2, \ldots, v^n)$ *une fonction dérivable par rapport aux* n *variables* v^i. *Montrons que les dérivées partielles de* f *sont les composantes d'un tenseur d'ordre un.*
La différentielle de f *s'écrit :*

$$df = f_{,i}\, du^i$$

C'est le produit contracté du vecteur gradient de f *avec le vecteur différentiel* $d\boldsymbol{M}$ *dont les composantes sont contravariantes d'après* (10) *p.* 29. *Or* df *est un scalaire donc les dérivées partielles sont les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre un.*

Exemple 20.9.6. *Montrons que les* n^2 *quantités* g_{ij} *sont les composantes covariantes d'un tenseur. Le produit tensoriel des* g_{ij} *avec les composantes contravariantes d'un vecteur quelconque* $\mathbf{v}$ *donne* $g_{ij}v^k$. *La contraction sur les indices* j *et* k *donne les composantes covariantes du vecteur* $\mathbf{v}$ *:*

$$\forall i \quad g_{ij}v^j = v_i$$

Selon le critère général de tensorialité, les n^2 *quantités* g_{ij} *sont donc les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux.*

20.9.8 Produit complètement contracté

Soit une suite de n^3 quantités ${u^{ij}}_k$ attachées à une base $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k$:

$${u^{11}}_1\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + {u^{11}}_2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^2 + \cdots + {u^{11}}_n\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^n + {u^{12}}_1\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^1 + \ldots$$

Ces quantités sont-elles les composantes d'un tenseur ?

Soient $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = y^j\mathbf{e}_j$, et $\mathbf{z} = z^k\mathbf{e}_k$ trois vecteurs. Si la suite des n^3 quantités ${u^{ij}}_k$ constitue les composantes d'un tenseur alors le produit complètement contracté,

$${u^{ij}}_k x_i y_j z^k = \alpha$$

donne un scalaire (quantité invariante par changement de base).

Réciproquement, si le produit contracté ${u^{ij}}_k x_i y_j z^k$ est un scalaire, alors il est invariant

$$\begin{aligned} {u^{l'm'}}_{n'} x_{l'} y_{m'} z^{n'} &= {u^{ij}}_k x_i y_j z^k \\ &= {u^{ij}}_k \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{n'}} x_{l'} y_{m'} z^{n'} \end{aligned}$$

est une relation vraie quels que soient les vecteurs $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ donc,

$$\forall l, m, n \quad {u^{l'm'}}_{n'} = {u^{ij}}_k \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{n'}}$$

et les n^3 quantités ${u^{ij}}_k$ sont les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre trois.

Théorème 20.9.2. *Critère de tensorialité*

Pour qu'un ensemble de n^{p+q} *quantités ayant* p *indices supérieurs et* q *indices inférieurs soit un tenseur, il faut et il suffit que leur produit complètement contracté par les composantes contravariantes de* p *vecteurs quelconques et par les composantes covariantes de* q *vecteurs quelconques donne un scalaire.*

Exemple 20.9.7. *Démontrons que le produit contracté des tenseurs* **U** *et* **V** *est invariant par changement de base :*

$$\forall j \quad u^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} u^i \qquad ; \qquad \forall l \quad v_{l'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}} v_k$$

Le produit des composantes donne :

$$\forall j, l \quad u^{j'} v_{l'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}} u^i v_k$$

Contractons des indices j et l :

$$\begin{aligned} u^{j'} v_{j'} &= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} u^i v_k \\ &= \delta_i^k u^i v_k \\ &= u^k v_k \end{aligned}$$

$u^k v_k$ est invariant par changement de base. C'est le produit scalaire des vecteurs **U** *et* **V**.

20.10 Équations tensorielles

20.10.1 Changement de système de coordonnées

Une équation tensorielle vraie dans un système de coordonnées est vraie dans tout système de coordonnées.

Exemple 20.10.1. *Soit* **T** *un tenseur deux fois covariant, nul dans un système de coordonnée :*

$$\forall i, \ \forall j, \quad t_{ij} = 0$$

Alors, par changement de coordonnée :

$$\begin{aligned} \forall k, l \quad t_{k'l'} &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j} t_{ij} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et le tenseur **T** *est nul dans tout système de coordonnées.*

Exemple 20.10.2. *Soit l'équation suivante,*

$$\forall i, j \quad r_{ijk} s^k = 3 t_i^{kl} u_{jk} v_l + w_{ij}$$

qui peut toujours s'écrire :

$$r_{ijk} s^k - 3 t_i^{kl} u_{jk} v_l - w_{ij} = 0$$

Si l'on peut montrer que les

$$z_{ij} = r_{ijk} s^k - 3 t_i^{kl} u_{jk} v_l - w_{ij}$$

sont les composantes (covariantes) d'un tenseur d'ordre deux, alors d'après l'exemple précédent cette équation tensorielle est vraie dans tout système de coordonnées.

20.10.2 Règles sur les indices

(1) Indice muet

Dans tout monome tensoriel, on peut inverser les positions haut et bas de tout indice muet :

$$\begin{aligned} A^i{}_j B_i &= g^{ik} A_{kj} g_{il} B^l \\ &= g^{ik} g_{il} A_{kj} B^l \\ &= \delta^k_l A_{kj} B^l \\ &= A_{lj} B^l \\ &= A_{ij} B^i \end{aligned}$$

(2) Indice libre

Si dans *tous* les termes d'une équation tensorielle figure un même indice libre, on a une équation équivalente en élevant ou en abaissant partout cet indice :

$$\begin{gathered} \forall \lambda, \mu \quad S_{\lambda\mu} = \chi Q_{\lambda\mu} \\ \forall \nu, \mu \quad g^{\lambda\nu} S_{\lambda\mu} = g^{\lambda\nu} \chi Q_{\lambda\mu} \\ \forall \nu, \mu \quad S^\nu{}_\mu = \chi Q^\nu{}_\mu \\ \forall \lambda, \mu \quad S^\lambda{}_\mu = \chi Q^\lambda{}_\mu \end{gathered}$$

Si nous appliquons cette règle une seconde fois :

$$\begin{gathered} \forall \lambda, \xi \quad g^{\mu\xi} S^\lambda{}_\mu = g^{\mu\xi} \chi Q^\lambda{}_\mu \\ \forall \lambda, \xi \quad S^{\lambda\xi} = \chi Q^{\lambda\xi} \\ \forall \lambda, \mu \quad S^{\lambda\mu} = \chi Q^{\lambda\mu} \end{gathered}$$

21

Espace euclidien en coordonnées curvilignes

21.1 Élément linéaire de l'espace euclidien

Définition 21.1.1. *Élément linéaire d'espace*
Soit $\mathcal{E}_n$ un espace ponctuel euclidien rapporté à un système de coordonnées curvilignes (x^i). Le carré de la distance entre deux points infiniment voisins, noté ds^2, est égal au carré de la norme euclidienne du vecteur infinitésimal $d\boldsymbol{M}$. En utilisant la relation (72) p. 144, nous avons :

$$ds^2 \triangleq d\boldsymbol{M} \cdot d\boldsymbol{M}$$

$$\boxed{ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j}$$

ds est appelé élément linéaire d'espace, ou distance élémentaire ou encore métrique de l'espace.

$ds = \|d\boldsymbol{M}\|$ est aussi l'abscisse curviligne du point M exprimée dans la base infiniment proche. D'après le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt 12.8.1 p. 106, dans tout espace euclidien il existe un système de coordonnées rectangulaires dans lequel le tenseur métrique est égal à la matrice unité. Réciproquement, s'il existe un système de coordonnées rectangulaires alors l'espace est euclidien, et dans ce système le tenseur métrique est égal à la matrice unité. C'est le seul cas ou tenseur métrique et système de coordonnées sont liés. Dans les autres cas d'espaces non-euclidiens, le tenseur métrique et le système de coordonnées curvilignes utilisé pour le décrire sont complètement indépendants.

L'élément linéaire le long d'une courbe paramétrée de paramètre λ, est une fonction de ce paramètre : $ds = ds(\lambda)$. Il est souvent avantageux de faire apparaitre explicitement le paramètre λ dans sa définition :

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = g_{ij}\, \frac{dx^i}{d\lambda}\, \frac{dx^j}{d\lambda} \tag{110}$$

Exemple 21.1.1. *Déterminons l'expression du carré de l'élément linéaire d'espace en coordonnées sphériques de trois façons différentes.*

(1) Cherchons l'expression de $d\boldsymbol{M}$ *en coordonnées sphériques, dans la base rectangulaires. Le vecteur position s'écrit :*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{OM} &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z\\ &= r\sin(\theta)\cos(\phi)\,\mathbf{e}_x + r\sin(\theta)\sin(\phi)\,\mathbf{e}_y + r\cos(\theta)\,\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

Or,

$$d\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{,r}\,dr + \boldsymbol{M}_{,\theta}\,d\theta + \boldsymbol{M}_{,\phi}\,d\phi$$

avec :

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}_{,r} = \sin(\theta)\cos(\phi)\,\mathbf{e}_x + \sin(\theta)\sin(\phi)\,\mathbf{e}_y + \cos(\theta)\,\mathbf{e}_z\\ \boldsymbol{M}_{,\theta} = r\cos(\theta)\cos(\phi)\,\mathbf{e}_x + r\cos(\theta)\sin(\phi)\,\mathbf{e}_y - r\sin(\theta)\,\mathbf{e}_z\\ \boldsymbol{M}_{,\phi} = -r\sin(\theta)\sin(\phi)\,\mathbf{e}_x + r\sin(\theta)\cos(\phi)\,\mathbf{e}_y\end{cases}$$

Soit :

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{M} &= (\sin(\theta)\cos(\phi)\,\mathbf{e}_x + \sin(\theta)\sin(\phi)\,\mathbf{e}_y + \cos(\theta)\,\mathbf{e}_z)\,dr\\ &\quad + (r\cos(\theta)\cos(\phi)\,\mathbf{e}_x + r\cos(\theta)\sin(\phi)\,\mathbf{e}_y - r\sin(\theta)\,\mathbf{e}_z)\,d\theta\\ &\quad + (-r\sin(\theta)\sin(\phi)\,\mathbf{e}_x + r\sin(\theta)\cos(\phi)\,\mathbf{e}_y)\,d\phi\\ &= (\sin(\theta)\cos(\phi)\,dr + r\cos(\theta)\cos(\phi)\,d\theta - r\sin(\theta)\sin(\phi)\,d\phi)\mathbf{e}_x\\ &\quad + (\sin(\theta)\sin(\phi)\,dr + r\cos(\theta)\sin(\phi)\,d\theta + r\sin(\theta)\cos(\phi)\,d\phi)\mathbf{e}_y\\ &\quad + (\cos(\theta)\,dr - r\sin(\theta)\,d\theta)\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

dont le produit scalaire avec lui-même donne l'expression cherchée :

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{M} &= \left(\sin^2(\theta)\cos^2\phi + \sin^2(\theta)\sin^2\phi + \cos^2(\theta)\right)dr^2\\ &\quad + r^2\left(\cos^2(\theta)\cos^2\phi + \cos^2(\theta)\sin^2\phi + \sin^2(\theta)\right)d\theta^2\\ &\quad + \left(\sin^2(\theta)\sin^2\phi + \sin^2(\theta)\cos^2\phi\right)d\phi^2\\ ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2\end{aligned}$$

(2) Cherchons l'expression de $d\boldsymbol{M}$ *en coordonnées sphériques, dans la base naturelle. Le vecteur position s'écrit :*

$$\boldsymbol{OM} = r\mathbf{e}_r$$

Sa différentielle vaut :

$$d\boldsymbol{M} = dr\mathbf{e}_r + rd\mathbf{e}_r$$

Or d'après les relations (7) *p.* *23* *:*

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \sin(\theta)\cos(\phi)\,\mathbf{e}_x + \sin(\theta)\sin(\phi)\,\mathbf{e}_y + \cos(\theta)\,\mathbf{e}_z\\ d\mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_{r,\theta}d\theta + \mathbf{e}_{r,\phi}d\phi\\ &= (\cos(\theta)\cos(\phi)\,\mathbf{e}_x + \cos(\theta)\sin(\phi)\,\mathbf{e}_y - \sin(\theta)\,\mathbf{e}_z)d\theta\\ &\quad + (-\sin(\theta)\sin(\phi)\,\mathbf{e}_x + \sin(\theta)\cos(\phi)\,\mathbf{e}_y)d\phi\end{aligned}$$

Les vecteurs $\mathbf{e}_r$ et $d\mathbf{e}_r$ étant perpendiculaires, et le vecteur $\mathbf{e}_r$ étant de norme unité :

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{M} &= dr^2\|\mathbf{e}_r\|^2 + r^2\|d\mathbf{e}_r\|^2\\
&= dr^2 + r^2[(\cos^2(\theta)\cos^2\phi + \cos^2(\theta)\sin^2\phi + \sin^2(\theta))d\theta^2\\
&\qquad + (\sin^2(\theta)\sin^2\phi + \sin^2(\theta)\cos^2\phi)d\phi^2]\\
&= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2
\end{aligned}$$

(3) En utilisant le tenseur métrique en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
ds^2 &= g_{ij}\,du^i du^j\\
&= g_{11}\,du^1du^1 + g_{12}\,du^1du^2 + g_{13}\,du^1du^3\\
&\qquad + g_{21}\,du^2du^1 + g_{22}\,du^2du^2 + g_{23}\,du^2du^3\\
&\qquad\qquad + g_{31}\,du^3du^1 + g_{32}\,du^3du^2 + g_{33}\,du^3du^3\\
&= g_{11}\,(du^1)^2 + 2g_{12}\,du^1du^2 + 2g_{13}\,du^1du^3 + g_{22}\,(du^2)^2 + 2g_{23}\,du^2du^3 + g_{33}\,(du^3)^2
\end{aligned}$$

Pour un système de coordonnées orthogonales le tenseur métrique est diagonal :

$$ds^2 = g_{11}\,(du^1)^2 + g_{22}\,(du^2)^2 + g_{33}\,(du^3)^2$$

En coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
ds^2 &= g_{rr}\,dr^2 + g_{\theta\theta}\,d\theta^2 + g_{\phi\phi}\,d\phi^2\\
&= \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_r\,dr^2 + \mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_\theta\,d\theta^2 + \mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{e}_\phi\,d\phi^2\\
&= \|\mathbf{e}_r\|^2dr^2 + \|\mathbf{e}_\theta\|^2d\theta^2 + \|\mathbf{e}_\phi\|^2\phi^2
\end{aligned}$$

Le paragraphe 8 p. 23 donne les normes des vecteurs de la base naturelle en coordonnées sphériques,

$$\begin{cases}\|\mathbf{e}_r\| = 1\\ \|\mathbf{e}_\theta\| = r\\ \|\mathbf{e}_\phi\| = r\sin(\theta)\end{cases}$$

et l'on a :

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2$$

21.2 Equation d'une droite

Il existe plusieurs définitions équivalentes d'une droite. Par exemple, c'est le chemin le plus court entre deux points (segment de droite), donc tel que la variation première de la longueur de ce chemin soit nulle. Dans un espace ponctuel rapporté à un système de coordonnées curviligne (x^i), une courbe $x^i = x^i(\lambda)$ est une droite ssi :

$$\delta\int_a^b\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}}\,d\lambda = 0$$

Si l'intégrale d'une fonction est extrémale il en va de même de l'intégrale du carré de cette fonction :

$$\delta \int_a^b g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} d\lambda = 0$$

Prenons pour paramètre le temps pour utiliser la notation de Newton du point pour la dérivation temporelle :

$$\delta \int_a^b g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j dt = 0$$

En posant le lagrangien

$$L = g_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j$$

nous avons

$$\delta \int_a^b L\left(\dot{x}^i\right) dt = 0$$

D'après le principe de Hamilton cette relation donne le système des n équations d'Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned} \forall i \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(2 g_{ij}\, \dot{x}^j\right) - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(g_{jk}\, \dot{x}^j \dot{x}^k\right) &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(g_{ij}\, \dot{x}^j\right) - \tfrac{1}{2}\, \partial_i g_{jk}\, \dot{x}^j \dot{x}^k &= 0 \end{aligned}$$

Exemple 21.2.1. *Cherchons le système d'équations paramétriques pour une droite en coordonnées polaires. Le lagrangien a pour expression :*

$$\begin{aligned} L(\dot{\rho}, \dot{\theta}) &= g_{\rho\rho}\, \dot{\rho}^2 + 2 g_{\rho\theta}\, \dot{\rho}\dot{\theta} + g_{\theta\theta}\, \dot{\theta}^2 \\ &= \dot{\rho}^2 + \rho^2\, \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\rho^2 \dot{\theta}\right) = 0 \end{cases}$$

Ce sont respectivement les termes d'accélération en $\mathbf{e}_\rho$ *et* $\mathbf{e}_\theta$*. Nous verrons p. 266 qu'une droite peut aussi être définie comme la trajectoire d'un point ayant une accélération nulle.*

Montrons que ce système d'équations différentielles donne bien une droite. En coordonnées rectangulaires, l'équation d'une droite $y = ax + b$ *peut aussi s'écrire :*

$$ax + by = c$$

En passant en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} a\rho\cos(\theta) + b\rho\sin(\theta) &= c \\ \rho\left(a\cos(\theta) + b\sin(\theta)\right) &= c \end{aligned}$$

En dérivant par rapport au temps :

$$\dot{\rho}\left(a\cos(\theta) + b\sin(\theta)\right) + \rho\dot{\theta}(-a\sin(\theta) + b\cos(\theta)) = 0$$

En dérivant à nouveau :

$$\ddot{\rho}\left(a\cos(\theta)+b\sin(\theta)\right)+\dot{\rho}\dot{\theta}(-a\sin(\theta)+b\cos(\theta))+\dot{\rho}\dot{\theta}(-a\sin(\theta)+b\cos(\theta))$$
$$+\rho\ddot{\theta}(-a\sin(\theta)+b\cos(\theta))+\rho\dot{\theta}^2\left(-a\cos(\theta)-b\sin(\theta)\right)=0$$

$$\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2\right)\left(a\cos(\theta)+b\sin(\theta)\right)+\left(2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta}\right)\left(-a\sin(\theta)-b\cos(\theta)\right)=0$$

$$\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2\right)\left(a\cos(\theta)+b\sin(\theta)\right)+\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right)\left(-a\sin(\theta)-b\cos(\theta)\right)=0$$

On retrouve bien

$$\begin{cases}\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2=0\\ \dfrac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right)=0\end{cases}$$

21.3 Volume élémentaire de l'espace euclidien

Pour construire un volume élémentaire, nous prenons une variation

$$\delta\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_{,i}\,dx^i$$

le long de chaque coordonnée x^i pour former un parallélépipède. Soit E_3 un espace vectoriel euclidien, construisons d'abord une surface élémentaire orientée $d\boldsymbol{\mathcal{A}}$:

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{\mathcal{A}}&=\boldsymbol{M}_{,2}\,dx^2\times\boldsymbol{M}_{,3}\,dx^3\\&=\mathbf{e}_2dx^2\times\mathbf{e}_3dx^3\\&=\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3\,dx^2dx^3\end{aligned}$$

où l'opérateur $\times$ est le produit vectoriel. Construisons un élément de volume :

$$d\mathcal{V}=\mathbf{e}_1dx^1\cdot\left(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3\,dx^2dx^3\right)$$

$$\boxed{d\mathcal{V}=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3\,dx^1dx^2dx^3}$$

Exemple 21.3.1. *En coordonnées sphériques, avec les relations du paragraphe 8 p. 23 :*

$$\begin{aligned}d\mathcal{V}&=\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_\theta\times\mathbf{e}_\phi\,drd\theta d\phi\\
&=\begin{pmatrix}\sin(\theta)\,\cos(\phi)\\ \sin(\theta)\,\sin(\phi)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}r\cos(\theta)\,\cos(\phi)\\ r\cos(\theta)\,\sin(\phi)\\ -r\sin(\theta)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-r\sin(\theta)\,\sin(\phi)\\ r\sin(\theta)\,\cos(\phi)\\ 0\end{pmatrix}drd\theta d\phi\\
&=\begin{pmatrix}\sin(\theta)\,\cos(\phi)\\ \sin(\theta)\,\sin(\phi)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}r^2\sin^2(\theta)\,\cos(\phi)\\ r^2\sin^2(\theta)\,\sin(\phi)\\ r^2\cos(\theta)\,\sin(\theta)\end{pmatrix}drd\theta d\phi\\
&=\left[r^2\sin^3\theta\,\cos^2\phi+r^2\sin^3\theta\,\sin^2\phi+r^2\cos^2(\theta)\,\sin(\theta)\right]drd\theta d\phi\\
&=\left[r^2\sin^3\theta+r^2\cos^2(\theta)\,\sin(\theta)\right]drd\theta d\phi\\
&=r^2\sin(\theta)\,drd\theta d\phi\end{aligned}$$

On peut exprimer le volume élémentaire grâce au tenseur métrique. En coordonnées sphériques, le tenseur métrique a pour composantes

$$G \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Son déterminant vaut :

$$\begin{aligned} g &= r^4 \sin^2(\theta) \\ \sqrt{g} &= r^2 \sin(\theta) \end{aligned}$$

Si bien que :

$$d\mathcal{V} = \sqrt{g}\, dr d\theta d\phi$$

Théorème 21.3.1. *Soit $\mathcal{E}_n$ un espace ponctuel pré-euclidien rapporté à un système de coordonnées curvilignes (u^i). Le volume élémentaire de l'espace est le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\mathbf{e}_i\, du^i$:*

$$d\mathcal{V} = \sqrt{|g|}\, du^1\, du^2 \ldots du^n \tag{111}$$

On déduit par intégration la mesure d'un volume fini de l'espace :

$$\boxed{\mathcal{V} = \int \sqrt{|g|} \prod_{i=1}^{n} du^i}$$

Démonstration. Dans un espace ponctuel euclidien $\mathcal{E}_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 &= \partial_1 \boldsymbol{M} \cdot \partial_2 \boldsymbol{M} \times \partial_3 \boldsymbol{M} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 x \\ \partial_1 y \\ \partial_1 z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_2 x \\ \partial_2 y \\ \partial_2 z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_3 x \\ \partial_3 y \\ \partial_3 z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 x \\ \partial_1 y \\ \partial_1 z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_2 y \partial_3 z - \partial_2 z \partial_3 y \\ \partial_2 z \partial_3 x - \partial_2 x \partial_3 z \\ \partial_2 x \partial_3 y - \partial_2 y \partial_3 x \end{pmatrix} \\ &= \partial_1 x (\partial_2 y \partial_3 z - \partial_2 z \partial_3 y) \\ &\qquad + \partial_1 y (\partial_2 z \partial_3 x - \partial_2 x \partial_3 z) \\ &\qquad\qquad + \partial_1 z (\partial_2 x \partial_3 y - \partial_2 y \partial_3 x) \\ &= \det \begin{bmatrix} \partial_1 x & \partial_2 x & \partial_3 x \\ \partial_1 y & \partial_2 y & \partial_3 y \\ \partial_1 z & \partial_2 z & \partial_3 z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le déterminant de toute matrice est égal au déterminant de sa transposée :

$$(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)^2 = \det \begin{bmatrix} \partial_1 x & \partial_1 y & \partial_1 z \\ \partial_2 x & \partial_2 y & \partial_2 z \\ \partial_3 x & \partial_3 y & \partial_3 z \end{bmatrix} \times \det \begin{bmatrix} \partial_1 x & \partial_2 x & \partial_3 x \\ \partial_1 y & \partial_2 y & \partial_3 y \\ \partial_1 z & \partial_2 z & \partial_3 z \end{bmatrix}$$

Quelles que soient $[A]$ et $[B]$ deux matrices, $\det[A] \times \det[B] = \det([A][B])$:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)^2 = \\
&\det \begin{bmatrix} (x_{,1})^2 + (y_{,1})^2 + (z_{,1})^2 & x_{,1}x_{,2} + y_{,1}y_{,2} + z_{,1}z_{,2} & x_{,1}x_{,3} + y_{,1}y_{,3} + z_{,1}z_{,3} \\ x_{,2}x_{,1} + y_{,2}y_{,1} + z_{,2}z_{,1} & (x_{,2})^2 + (y_{,2})^2 + (z_{,2})^2 & x_{,2}x_{,3} + y_{,2}y_{,3} + z_{,2}z_{,3} \\ x_{,3}x_{,1} + y_{,3}y_{,1} + z_{,3}z_{,1} & x_{,3}x_{,2} + y_{,3}y_{,2} + z_{,3}z_{,2} & (x_{,3})^2 + (y_{,3})^2 + (z_{,3})^2 \end{bmatrix} \\
&\qquad = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \\
&\qquad = g
\end{aligned}$$

d'où :

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \sqrt{g}$$

□

21.4 Les symboles de Christoffel

Nous avons vu au chapitre 19 p. 161 que lorsque le système de coordonnées est curviligne, qu'il soit orthogonal ou non, nous ne pouvons plus lui associer de base globale. Nous avons alors définit une base locale, la base naturelle, dont les vecteurs de base sont fonction des coordonnées du point où l'on se trouve. Nous avons effectuer des changements de base en restant au même point, par changement de coordonnées.

Nous nous intéressons maintenant au changement de base lorsque l'on passe d'un point à un autre infiniment proche, en restant dans le même système de coordonnées. Les vecteurs de la nouvelle base naturelle locale tournent et changent de norme en passant d'un point à un autre. Ils sont bien entendu exprimés dans l'ancienne base naturelle locale, seule base connue a priori. Pour rester dans l'ancienne base naturelle locale, nous utiliserons le calcul différentiel au voisinage de l'origine de cette ancienne base.

21.4.1 Le problème fondamental de l'analyse tensorielle

Supposons qu'en tout point M d'un espace ponctuel euclidien $\mathcal{E}_n$, nous attachions un tenseur défini par ses composantes relatives au repère naturel en M du système de coordonnées curvilignes (x^i). Nous dirons que nous nous sommes donné un champ de tenseur dans le système (u^i). Le tenseur métrique $g_{ij}\left(x^k\right)$ fournit un tel exemple de champ de tenseurs. Pour pouvoir comparer ces tenseurs, il convient d'étudier comment le repère naturel varie quand on passe d'un point M à un point infiniment voisin.

Problème. *L'espace ponctuel euclidien $\mathcal{E}_n$ étant rapporté à un système de coordonnées curvilignes (x^j), pour lequel l'élément linéaire de l'espace est*

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

déterminer, par rapport au repère naturel $(M, \mathbf{e}_j)$, le repère naturel infiniment voisin $(M + d\boldsymbol{M}, \mathbf{e}_j + d\mathbf{e}_j)$.

Autrement dit, cherchons l'expression des vecteurs infinitésimaux $d\boldsymbol{M}$ et $d\mathbf{e}_j$. Le premier est donné par la relation (10) p. 29 :

$$d\boldsymbol{M} = dx^j \mathbf{e}_j$$

Pour le second, appelons ω^i les composantes contravariantes (cherchées) du vecteur $d\mathbf{e}_j$:

$$\forall j \quad d\mathbf{e}_j = \omega^i{}_j \mathbf{e}_i \tag{112}$$

Tout vecteur $d\mathbf{e}_j$ est fonction du vecteur déplacement $d\boldsymbol{M}$. Les $\omega^i{}_j$ sont donc des infiniment petits du même ordre que les dx^j, et ils doivent s'annuler en même temps qu'eux. Par conséquent ils sont une combinaison linéaires des différentielles dx^k (ceci devient évident avec l'exemple 21.4.1 p. 223)

$$\forall i, j \quad \omega^i{}_j = \Gamma^i{}_{jk}\, dx^k \tag{113}$$

où les $\Gamma^i{}_{jk}$ désignent n^3 (chacun des trois indices i, j, k varie de 1 à n) fonctions des coordonnées $\left(x^k\right)$ du point M. Notre problème se trouve ainsi ramené à la détermination des n^3 fonctions $\Gamma^i{}_{jk}$ à partir des $n(n+1)/2$ fonctions g_{ij}. Avec les deux relations précédentes :

$$\forall i \quad d\mathbf{e}_j = \Gamma^i{}_{jk}\, dx^k \mathbf{e}_i \tag{114}$$

Définition 21.4.1. *Symboles de Christoffel de deuxième espèce*
Les n^3 quantités $\Gamma^i{}_{jk}\left(x^k\right)$ sont appelées symboles de Christoffel de deuxième espèce.

Nous avons, $\forall j$:

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_j &= \Gamma^i{}_{jk}\, dx^k \mathbf{e}_i \\ \partial_k \mathbf{e}_j\, dx^k &= \Gamma^i{}_{jk}\, dx^k \mathbf{e}_i \\ \forall j, k \quad \partial_k \mathbf{e}_j &= \Gamma^i{}_{jk}\, \mathbf{e}_i \end{aligned} \tag{115}$$

$\mathbf{e}_{j,k}$ étant un vecteur, il s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de base $\mathbf{e}_i$. $\Gamma^i{}_{jk}$ est la i ème composante de ce vecteur.

Appelons ω_{ij} les composantes covariantes du vecteur $d\mathbf{e}_j$:

$$\forall i, j \quad \omega_{ij} = d\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i$$

Remarque 34. *Les ω_{ij} ne sont pas symétriques :*

$$\omega_{ij} \neq \omega_{ji}$$

par exemple $\omega_{12} = d\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1$ et $\omega_{21} = d\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2$. Par conséquent

$$\omega^i{}_j \neq \omega_j{}^i$$

Les ω_{ij} sont aussi des combinaisons linéaires des différentielles dx^k :

$$\forall i, j \quad \omega_{ij} = \Gamma_{ijk}\, dx^k$$

Notation 23. *La notation des indices de gamma dans l'ordre ijk est arbitraire mais un choix est nécessaire. Nous avons choisi d'écrire en premier l'indice de la composante, en deuxième l'indice du vecteur et en dernier l'indice de la différentielle.*

DÉFINITION 21.4.2. *Symboles de Christoffel de première espèce*
Les n^3 quantités $\Gamma_{ijk}\left(x^k\right)$ sont appelées symboles de Christoffel de première espèce.

EXEMPLE 21.4.1. *Symboles de Christoffel en coordonnées polaires*
Étudions le problème de la variation du repère naturel en coordonnées polaires. En dérivant les relations (5) p. 22 :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{\rho,\rho} = 0 \\ \mathbf{e}_{\rho,\theta} = -\sin(\theta)\,\mathbf{e}_x + \cos(\theta)\,\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_{\theta,\rho} = -\sin(\theta)\,\mathbf{e}_x + \cos(\theta)\,\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_{\theta,\theta} = -\rho\cos(\theta)\,\mathbf{e}_x - \rho\sin(\theta)\,\mathbf{e}_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_{\rho,\rho} = 0 \\ \mathbf{e}_{\rho,\theta} = \mathbf{e}_\theta/\rho \\ \mathbf{e}_{\theta,\rho} = \mathbf{e}_\theta/\rho \\ \mathbf{e}_{\theta,\theta} = -\rho\,\mathbf{e}_\rho \end{cases}$$

Les différentielles des vecteurs de la base naturelle polaire s'écrivent :

$$\begin{cases} d\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_{\rho,\rho}\,d\rho + \mathbf{e}_{\rho,\theta}\,d\theta \\ d\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_{\theta,\rho}\,d\rho + \mathbf{e}_{\theta,\theta}\,d\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\theta\,d\theta/\rho \\ d\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\theta\,d\rho/\rho - \rho\mathbf{e}_\rho\,d\theta \end{cases} \tag{116}$$

En identifiant avec

$$\begin{cases} d\mathbf{e}_\rho = \Gamma^\rho{}_{\rho\rho}\,d\rho\,\mathbf{e}_\rho + \Gamma^\rho{}_{\rho\theta}\,d\theta\,\mathbf{e}_\rho + \Gamma^\theta{}_{\rho\rho}\,d\rho\,\mathbf{e}_\theta + \Gamma^\theta{}_{\rho\theta}\,d\theta\,\mathbf{e}_\theta \\ d\mathbf{e}_\theta = \Gamma^\rho{}_{\theta\rho}\,d\rho\,\mathbf{e}_\rho + \Gamma^\rho{}_{\theta\theta}\,d\theta\,\mathbf{e}_\rho + \Gamma^\theta{}_{\theta\rho}\,d\rho\,\mathbf{e}_\theta + \Gamma^\theta{}_{\theta\theta}\,d\theta\,\mathbf{e}_\theta \end{cases}$$

les symboles de Christoffel de deuxième espèce s'écrivent :

$$\begin{array}{llll} \Gamma^\rho{}_{\rho\rho} = 0 & \Gamma^\rho{}_{\rho\theta} = 0 & \Gamma^\theta{}_{\rho\rho} = 0 & \Gamma^\theta{}_{\rho\theta} = 1/\rho \\ \Gamma^\rho{}_{\theta\rho} = 0 & \Gamma^\rho{}_{\theta\theta} = -\rho & \Gamma^\theta{}_{\theta\rho} = 1/\rho & \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} = 0 \end{array}$$

21.4.2 Relations entre symboles de Christoffel de première et seconde espèce

Les composantes covariantes ω_{ij} et contravariantes $\omega^i{}_j$ du vecteur $d\mathbf{e}_j$ sont liées par la relation, $\forall i,j$:

$$\omega_{ij} = g_{ih}\omega^h{}_j$$
$$\Gamma_{ijk}\,dx^k = g_{ih}\Gamma^h{}_{jk}\,dx^k$$
$$\forall i,j,k \quad \Gamma_{ijk} = g_{ih}\Gamma^h{}_{jk} \tag{117}$$

Le tenseur métrique abaisse l'indice haut, celui de la composante, qui passe de contravariante à covariante. C'est pourquoi dans la notation 23 p. 222 choisie, nous laissons une espace entre gamma est le premier indice. De même, nous écrirons :

$$\forall i,j,k \quad \Gamma^i{}_{jk} = g^{ih}\Gamma_{hjk} \tag{118}$$

La connaissance des n^3 fonctions $\Gamma^i{}_{jk}$ est donc équivalente à celle des n^3 fonctions Γ_{ijk}.

21.4.3 Symétrie des symboles de Christoffel par rapport aux indices

Écrivons les conditions d'intégrabilité de l'équation (10) p. 29. Pour que $d\boldsymbol{M}$ soit intégrable, autrement dit pour que $d\boldsymbol{M}$ soit une différentielle totale exacte, les dérivées secondes de $\boldsymbol{M}$ doivent être symétriques par rapport à leurs indices de dérivation (condition de Schwarz). En utilisant la définition 3.2.8 p. 21 puis les relations (115) p. 222. $\forall j, k$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial x^k \partial x^j} &= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x^j}\right) \\ \partial_{kj}\boldsymbol{M} &= \partial_k \mathbf{e}_j \\ \boldsymbol{M}_{,kj} &= \Gamma^i{}_{jk}\,\mathbf{e}_i \end{aligned} \tag{119}$$

Inversons l'ordre de dérivation. $\forall j, k$:

$$\boldsymbol{M}_{,kj} = \boldsymbol{M}_{,jk}$$

$$\Gamma^i{}_{jk}\,\mathbf{e}_i = \Gamma^i{}_{kj}\,\mathbf{e}_i \tag{120}$$

$$\forall i, j, k \quad \Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{kj} \tag{121}$$

Les symboles de Christoffel de deuxième espèce sont symétriques par rapport à leurs indices inférieurs. De même $\forall h, j, k$:

$$\begin{aligned} \Gamma^h{}_{jk} &= \Gamma^h{}_{kj} \\ g^{hi}\Gamma_{ijk} &= g^{hi}\Gamma_{ikj} \\ \forall i, j, k \quad \Gamma_{ijk} &= \Gamma_{ikj} \end{aligned}$$

Dans la notation 23 p. 222 choisie, les symboles de Christoffel de première espèce sont symétriques par rapport à leurs derniers indices. Ce dernier système est équivalent au système (121).

Pour chacune des n valeurs de l'indice de gauche i de $\Gamma^i{}_{jk}$, l'indice j varie de 1 à n, ainsi que l'indice k. Parmi les n^2 équations fournies par les indices j et k, on compte n égalités du type $\Gamma^i{}_{jj} = \Gamma^i{}_{jj}$ qui ne servent à rien. Parmi les $n^2 - n$ égalités restantes, se trouve l'égalité $\Gamma^i{}_{12} = \Gamma^i{}_{21}$, et plus loin, $\Gamma^i{}_{21} = \Gamma^i{}_{12}$. Les indices j et k founissent par conséquent $(n^2 - n)/2$ égalités distinctes. Au total, le système (121) permet d'établir le nombre suivant d'équations :

$$n \times \tfrac{1}{2}(n^2 - n) = \tfrac{1}{2}n^2(n-1)$$

Notation 24. *Les symboles de Christoffel sont aussi notés comme suit :*

$$\Gamma^i{}_{jk} = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} = \{jk, i\} \qquad \textit{et} \qquad \Gamma_{ijk} = [jk, i]$$

21.4.4 Symboles de Christoffel en fonction du tenseur métrique

À partir de la définition 12.1.1 p. 97 du tenseur métrique, $\forall i, j$:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \\ dg_{ij} &= \mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \cdot d\mathbf{e}_i \\ &= \mathbf{e}_i \cdot \omega^k{}_j \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_j \cdot \omega^k{}_i \mathbf{e}_k \end{aligned}$$

$$\partial_k g_{ij}\, dx^k = g_{ik}\omega^k{}_j + g_{jk}\omega^k{}_i \tag{122}$$

$$= g_{ih}\Gamma^h{}_{jk}\, dx^k + g_{jh}\Gamma^h{}_{ik}\, dx^k$$

$$\forall i, j, k \quad g_{ij,k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} \tag{123}$$

D'après la relation (35) p. 82, les g_{ij} étant au nombre de $n(n+1)/2$, le système (123) comprend $n^2(n+1)/2$ équations. Avec les équations de symétries des symboles de Christoffel, nous avons :

$$\tfrac{1}{2}n^2(n+1) + \tfrac{1}{2}n^2(n-1) = n^3$$

équations, pour les n^3 inconnues Γ_{ijk}. Ce système sera soluble si les conditions d'intégrabilité des vecteurs $\mathbf{e}_i$ sont satisfaites. Pour trouver les conditions d'intégrabilité des équations (10) p. 29, nous avons implicitement supposé que les équations (112) p. 222 l'étaient, puisque nous les avons utilisées pour écrire les relations (120) p. 224. L'intégrabilité des équations (112) est donc nécessaire à celle des équations (10). Pour que $d\mathbf{e}_i$ soit intégrable, les dérivées secondes de $\mathbf{e}_i$ doivent être symétriques par rapport à leurs indices de dérivation. Avec les relations (115) p. 222, nous avons, $\forall i, k, l$:

$$\begin{aligned}
&\partial_l\left(\partial_k \mathbf{e}_i\right) = \partial_k\left(\partial_l \mathbf{e}_i\right)\\
&\partial_l\left(\Gamma^j{}_{ik}\,\mathbf{e}_j\right) = \partial_k\left(\Gamma^j{}_{il}\,\mathbf{e}_j\right)\\
&\partial_l\Gamma^j{}_{ik}\,\mathbf{e}_j + \Gamma^j{}_{ik}\,\partial_l\mathbf{e}_j = \partial_k\Gamma^j{}_{il}\,\mathbf{e}_j + \Gamma^j{}_{il}\,\partial_k\mathbf{e}_j\\
&\partial_l\Gamma^j{}_{ik}\,\mathbf{e}_j + \Gamma^j{}_{ik}\,\Gamma^m{}_{jl}\,\mathbf{e}_m = \partial_k\Gamma^j{}_{il}\,\mathbf{e}_j + \Gamma^j{}_{il}\,\Gamma^m{}_{jk}\,\mathbf{e}_m\\
&\partial_l\Gamma^j{}_{ik}\,\mathbf{e}_j + \Gamma^m{}_{ik}\,\Gamma^j{}_{ml}\,\mathbf{e}_j = \partial_k\Gamma^j{}_{il}\,\mathbf{e}_j + \Gamma^m{}_{il}\,\Gamma^j{}_{mk}\,\mathbf{e}_j\\
&\left(\partial_l\Gamma^j{}_{ik} - \partial_k\Gamma^j{}_{il}\right) + \left(\Gamma^m{}_{ik}\,\Gamma^j{}_{ml} - \Gamma^m{}_{il}\,\Gamma^j{}_{mk}\right) = 0
\end{aligned}$$

En remplaçant les symboles de Christoffel par leurs expressions en fonction du tenseur métrique, (voir plus loin les relations (127) p. 225), on obtient les conditions nécessaires auxquelles doivent satisfaire les fonctions g_{ij} pour résoudre notre problème.

En appliquant deux fois la permutation circulaire des indices $i \to j,\ j \to k,\ k \to i$ aux relations (123) p. 224, nous obtenons deux autres ensembles de relations, $\forall i, j, k$:

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} = g_{ij,k}$$

$$\Gamma_{jki} + \Gamma_{kji} = g_{jk,i} \tag{124}$$

$$\Gamma_{kij} + \Gamma_{ikj} = g_{ki,j} \tag{125}$$

En additionnant les relations (123) et (125), et en soustrayant (124), nous obtenons les symboles de Christoffel de première espèce, $\forall i, j, k$:

$$2\Gamma_{ijk} = g_{ij,k} + g_{ki,j} - g_{jk,i}$$

$$\Gamma_{ijk} = \tfrac{1}{2}\left(g_{ij,k} + g_{ki,j} - g_{jk,i}\right) \tag{126}$$

Avec les relations (118) p. 223, les symboles de deuxième espèce ont pour expression, $\forall i, j, k$:

$$\Gamma^i{}_{jk} = \tfrac{1}{2}\,g^{ih}\left(g_{hj,k} + g_{kh,j} - g_{jk,h}\right) \tag{127}$$

21.4.5 Symboles de Christoffel de deuxième espèce contractés

Dans le cas particulier où $k = i$:

$$\Gamma^i{}_{ij} = \tfrac{1}{2}\,g^{ih}\left(g_{hj,i} + g_{ih,j} - g_{ji,h}\right)$$

Or,

$$\begin{aligned}
g^{ih}g_{hj,i} &= g^{hi}g_{hj,i}\\
&= g^{ih}g_{ij,h}\\
&= g^{ih}g_{ji,h}
\end{aligned}$$

Il reste

$$\Gamma^i{}_{ij} = \tfrac{1}{2}\, g^{ih} g_{ih,j} \tag{128}$$

Avec la relation (58) p. 104 :

$$\begin{aligned} \forall k \quad \Gamma^i{}_{ik} &= \frac{\partial_k g}{2g} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_k \sqrt{|g|} \\ &= \partial_k \ln \sqrt{|g|} \end{aligned} \tag{129}$$

Exemple 21.4.2. *Symboles de Christoffel de deuxième espèce contractés, pour la métrique de Schwarzschild*
D'après (56) p. 103 son déterminant s'écrit :

$$g = -e^{\nu+\lambda} r^4 \sin^2(\theta)$$

Notons par un point la dérivation par rapport à ct et par un prime celle par rapport à r :

$$\begin{cases} \Gamma^i{}_{i0} = \dfrac{\partial_0 g}{2g} \\ \Gamma^i{}_{i1} = \dfrac{\partial_1 g}{2g} \\ \Gamma^i{}_{i2} = \dfrac{\partial_2 g}{2g} \\ \Gamma^i{}_{i3} = \dfrac{\partial_3 g}{2g} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma^i{}_{i0} = \dfrac{-(\dot\nu + \dot\lambda) e^{\nu+\lambda} r^4 \sin^2\theta}{-2e^{\nu+\lambda} r^4 \sin^2\theta} \\ \Gamma^i{}_{i1} = \dfrac{-\left[4r^3 + (\nu' + \lambda') r^4\right] e^{\nu+\lambda} \sin^2\theta}{-2e^{\nu+\lambda} r^4 \sin^2\theta} \\ \Gamma^i{}_{i2} = \dfrac{-2e^{\nu+\lambda} r^4 \sin\theta\cos\theta}{-2e^{\nu+\lambda} r^4 \sin^2\theta} \\ \Gamma^i{}_{i3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma^i{}_{i0} = \dfrac{1}{2}(\dot\nu + \dot\lambda) \\ \Gamma^i{}_{i1} = \dfrac{2}{r} + \dfrac{1}{2}(\nu' + \lambda') \\ \Gamma^i{}_{i2} = \cot\theta \\ \Gamma^i{}_{i3} = 0 \end{cases}$$

21.4.6 Symboles de Christoffel en coordonnées rectilignes

En coordonnées rectilignes les symboles de Christoffel sont tous nuls car les vecteurs de base ne tournent pas :

$$\forall i,j \quad g_{ij} = c^{ste} \qquad \Rightarrow \qquad \forall i,j,k \quad g_{ij,k} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \forall i,j,k \quad \Gamma_{ijk} = 0 \\ \forall i,j,k \quad \Gamma^i{}_{jk} = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées rectilignes ne sont possibles que dans les espaces plats, pré-euclidiens. Par conséquent dans les espaces plats les symboles de Christoffel sont nuls.

Remarque 35. *Si les symboles de Christoffel étaient des tenseurs ils auraient même valeur dans tous les systèmes de coordonnées. Or ils sont nuls dans les systèmes de coordonnées rectilignes et non nuls dans les systèmes de coordonnées curvilignes. Par conséquent, ce ne sont pas des tenseurs. Pour les mêmes raisons les $\omega^i{}_j$ ne sont pas les composantes d'un tenseur.*

21.4.7 Symboles de Christoffel en coordonnées orthogonales

(1) Symboles de première espèce

En coordonnées orthogonales le tenseur métrique est diagonal, les relations (59) p. 105, $\forall i \neq j\ g_{ij} = 0$ permettent de simplifier les symboles de Christoffel de première espèce (126) p. 225 :

$$\begin{cases} \forall i = j = k, & \Gamma_{iii} = \frac{1}{2}\left(g_{ii,i} + g_{ii,i} - g_{ii,i}\right) \\ \forall i = j \neq k, & \Gamma_{iik} = \frac{1}{2}\left(g_{ii,k} + g_{ki,i} - g_{ik,i}\right) \\ \forall i \neq j = k, & \Gamma_{ijj} = \frac{1}{2}\left(g_{ij,j} + g_{ji,j} - g_{jj,i}\right) \\ \forall i = k \neq j, & \Gamma_{iji} = \frac{1}{2}\left(g_{ij,i} + g_{ii,j} - g_{ji,i}\right) \\ i, j, k \neq, & \Gamma_{ijk} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \Gamma_{iii} = \frac{1}{2}\, g_{ii,i} \\ \Gamma_{iij} = \frac{1}{2}\, g_{ii,j} \\ \Gamma_{ijj} = -\frac{1}{2}\, g_{jj,i} \\ \Gamma_{iji} = \frac{1}{2}\, g_{ii,j} \\ \Gamma_{ijk} = 0 \end{cases}$$

Avec la symétrie des symboles :

$$\begin{cases} \Gamma_{iii} = \frac{1}{2}\, g_{ii,i} \\ \Gamma_{iij} = \Gamma_{iji} = \frac{1}{2}\, g_{ii,j} \\ \Gamma_{ijj} = -\frac{1}{2}\, g_{jj,i} \end{cases} \tag{130}$$

(2) Symboles de deuxième espèce

À partir des relations (118) p. 223 et de nouveau avec $\forall i \neq j\ g_{ij} = 0$:

$$\begin{cases} {\Gamma^i}_{ii} = g^{ij}\Gamma_{jii} \\ {\Gamma^i}_{ij} = g^{ik}\Gamma_{kij} \\ {\Gamma^i}_{jj} = g^{ik}\Gamma_{kjj} \\ {\Gamma^i}_{ji} = g^{ik}\Gamma_{kji} \\ {\Gamma^i}_{jk} = g^{ih}\Gamma_{hjk} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} {\Gamma^i}_{ii} = g^{ii}\Gamma_{iii} & \textit{sans sommer sur } i \\ {\Gamma^i}_{ij} = g^{ii}\Gamma_{iij} & \textit{sans sommer sur } i \\ {\Gamma^i}_{jj} = g^{ii}\Gamma_{ijj} & \textit{sans sommer sur } i \\ {\Gamma^i}_{ji} = g^{ii}\Gamma_{iji} & \textit{sans sommer sur } i \\ {\Gamma^i}_{jk} = 0 \end{cases}$$

Avec les relations (60) p. 105, $\forall i\ g^{ii} = (g_{ii})^{-1}$, et avec les relations (130) :

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} {\Gamma^i}_{ii} = \Gamma_{iii}/g_{ii} \\ {\Gamma^i}_{ij} = \Gamma_{iij}/g_{ii} \\ {\Gamma^i}_{jj} = \Gamma_{ijj}/g_{ii} \\ {\Gamma^i}_{ji} = \Gamma_{iji}/g_{ii} \\ {\Gamma^i}_{jk} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} {\Gamma^i}_{ii} = g_{ii,i}/(2g_{ii}) \\ {\Gamma^i}_{ij} = g_{ii,j}/(2g_{ii}) \\ {\Gamma^i}_{jj} = -g_{jj,i}/(2g_{ii}) \\ {\Gamma^i}_{ji} = g_{ii,j}/(2g_{ii}) \\ {\Gamma^i}_{jk} = 0 \end{cases}$$

Avec la symétrie des symboles :

$$\begin{cases} {\Gamma^i}_{ii} = g_{ii,i}/(2g_{ii}) \\ {\Gamma^i}_{ij} = g_{ii,j}/(2g_{ii}) \\ {\Gamma^i}_{jj} = -g_{jj,i}/(2g_{ii}) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} {\Gamma^i}_{ii} = \frac{1}{2}\,\partial_i \ln g_{ii} \\ {\Gamma^i}_{ij} = \frac{1}{2}\,\partial_j \ln g_{ii} \\ {\Gamma^i}_{jj} = -g_{jj,i}/(2g_{ii}) \end{cases} \tag{131}$$

EXEMPLE 21.4.3. *Symboles de Christoffel en coordonnées cylindriques* (ρ, ϕ, z) *dans un espace euclidien, on a le tenseur métrique* (38) *p.* 97*,* $g_{\rho\rho} = 1$*,* $g_{\phi\phi} = \rho^2$*,* $g_{zz} = 1$*. Les dérivées partielles des* g_{ij} *sont nulles sauf* $g_{\phi\phi,\rho} = 2\rho$*.*

(1) Pour les symboles de première espèce nous utilisons les relations (130) *p.* 227 *:*

$$\begin{cases}\Gamma_{\phi\phi\rho} = \Gamma_{\phi\rho\phi} = \frac{1}{2}\, g_{\phi\phi,\rho} \\ \Gamma_{\rho\phi\phi} = -\frac{1}{2}\, g_{\phi\phi,\rho}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\Gamma_{\phi\phi\rho} = \Gamma_{\phi\rho\phi} = \rho \\ \Gamma_{\rho\phi\phi} = -\rho\end{cases}$$

(2) Pour les symboles de deuxième espèce nous utilisons les relations (131) *p.* 227 *:*

$$\begin{cases}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\rho} = \Gamma^{\phi}{}_{\rho\phi} = \Gamma_{\phi\phi\rho}/g_{\phi\phi} \\ \Gamma^{\rho}{}_{\phi\phi} = \Gamma_{\rho\phi\phi}/g_{\rho\rho}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\Gamma^{\phi}{}_{\phi\rho} = \Gamma^{\phi}{}_{\rho\phi} = 1/\rho \\ \Gamma^{\rho}{}_{\phi\phi} = -\rho\end{cases}$$

Avec les relations (114) *p.* 222 *:*

$$\begin{aligned}
d\mathbf{e}_1 &= \Gamma^1{}_{11}\,\mathbf{e}_1\,dx^1 + \Gamma^2{}_{11}\,\mathbf{e}_2\,dx^1 + \Gamma^3{}_{11}\,\mathbf{e}_3\,dx^1 \\
&\qquad + \Gamma^1{}_{12}\,\mathbf{e}_1\,dx^2 + \Gamma^2{}_{12}\,\mathbf{e}_2\,dx^2 + \Gamma^3{}_{12}\,\mathbf{e}_3\,dx^2 \\
&\qquad\qquad + \Gamma^1{}_{13}\,\mathbf{e}_1\,dx^3 + \Gamma^2{}_{13}\,\mathbf{e}_2\,dx^3 + \Gamma^3{}_{13}\,\mathbf{e}_3\,dx^3 \\
d\mathbf{e}_\rho &= \Gamma^{\rho}{}_{\rho\rho}\,\mathbf{e}_\rho\,d\rho + \Gamma^{\phi}{}_{\rho\rho}\,\mathbf{e}_\phi\,d\rho + \Gamma^{z}{}_{\rho\rho}\,\mathbf{e}_z\,d\rho \\
&\qquad + \Gamma^{\rho}{}_{\rho\phi}\,\mathbf{e}_\rho\,d\phi + \Gamma^{\phi}{}_{\rho\phi}\,\mathbf{e}_\phi\,d\phi + \Gamma^{z}{}_{\rho\phi}\,\mathbf{e}_z\,d\phi \\
&\qquad\qquad + \Gamma^{\rho}{}_{\rho z}\,\mathbf{e}_\rho\,dz + \Gamma^{\phi}{}_{\rho z}\,\mathbf{e}_\phi\,dz + \Gamma^{z}{}_{\rho z}\,\mathbf{e}_z\,dz \\
&= \rho^{-1}\mathbf{e}_\phi\,d\phi
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
d\mathbf{e}_2 &= \Gamma^1{}_{21}\,\mathbf{e}_1\,dx^1 + \Gamma^2{}_{21}\,\mathbf{e}_2\,dx^1 + \Gamma^3{}_{21}\,\mathbf{e}_3\,dx^1 \\
&\qquad + \Gamma^1{}_{22}\,\mathbf{e}_1\,dx^2 + \Gamma^2{}_{22}\,\mathbf{e}_2\,dx^2 + \Gamma^3{}_{22}\,\mathbf{e}_3\,dx^2 \\
&\qquad\qquad + \Gamma^1{}_{23}\,\mathbf{e}_1\,dx^3 + \Gamma^2{}_{23}\,\mathbf{e}_2\,dx^3 + \Gamma^3{}_{23}\,\mathbf{e}_3\,dx^3 \\
d\mathbf{e}_\phi &= \Gamma^{\rho}{}_{\phi\rho}\,\mathbf{e}_\rho\,d\rho + \Gamma^{\phi}{}_{\phi\rho}\,\mathbf{e}_\phi\,d\rho + \Gamma^{z}{}_{\phi\rho}\,\mathbf{e}_z\,d\rho \\
&\qquad + \Gamma^{\rho}{}_{\phi\phi}\,\mathbf{e}_\rho\,d\phi + \Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi}\,\mathbf{e}_\phi\,d\phi + \Gamma^{z}{}_{\phi\phi}\,\mathbf{e}_z\,d\phi \\
&\qquad\qquad + \Gamma^{\rho}{}_{\phi z}\,\mathbf{e}_\rho\,dz + \Gamma^{\phi}{}_{\phi z}\,\mathbf{e}_\phi\,dz + \Gamma^{z}{}_{\phi z}\,\mathbf{e}_z\,dz \\
&= \rho^{-1}\mathbf{e}_\phi\,d\rho - \rho\mathbf{e}_\rho\,d\phi
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
d\mathbf{e}_3 &= \Gamma^1{}_{31}\,\mathbf{e}_1\,dx^1 + \Gamma^2{}_{31}\,\mathbf{e}_2\,dx^1 + \Gamma^3{}_{31}\,\mathbf{e}_3\,dx^1 \\
&\qquad + \Gamma^1{}_{32}\,\mathbf{e}_1\,dx^2 + \Gamma^2{}_{32}\,\mathbf{e}_2\,dx^2 + \Gamma^3{}_{32}\,\mathbf{e}_3\,dx^2 \\
&\qquad\qquad + \Gamma^1{}_{33}\,\mathbf{e}_1\,dx^3 + \Gamma^2{}_{33}\,\mathbf{e}_2\,dx^3 + \Gamma^3{}_{33}\,\mathbf{e}_3\,dx^3 \\
d\mathbf{e}_z &= \Gamma^{\rho}{}_{z\rho}\,\mathbf{e}_\rho\,d\rho + \Gamma^{\phi}{}_{z\rho}\,\mathbf{e}_\phi\,d\rho + \Gamma^{z}{}_{z\rho}\,\mathbf{e}_z\,d\rho \\
&\qquad + \Gamma^{\rho}{}_{z\phi}\,\mathbf{e}_\rho\,d\phi + \Gamma^{\phi}{}_{z\phi}\,\mathbf{e}_\phi\,d\phi + \Gamma^{z}{}_{z\phi}\,\mathbf{e}_z\,d\phi \\
&\qquad\qquad + \Gamma^{\rho}{}_{zz}\,\mathbf{e}_\rho\,dz + \Gamma^{\phi}{}_{zz}\,\mathbf{e}_\phi\,dz + \Gamma^{z}{}_{zz}\,\mathbf{e}_z\,dz \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Exemple 21.4.4. *Symboles de Christoffel en coordonnées sphériques* (r, θ, ϕ) *dans un espace euclidien, en posant* $r = x^1$, $\theta = x^2$ *et* $\phi = x^3$, *on a le tenseur métrique* (39) *p.* 97, $g_{11} = 1$, $g_{22} = (x^1)^2$, $g_{33} = (x^1)^2 \sin^2 x^2$. *Les dérivées partielles des* g_{ij} *sont nulles sauf* $g_{22,1} = 2x^1$, $g_{33,1} = 2x^1 \sin^2 x^2$ *et* $g_{33,2} = 2\,(x^1)^2 \sin x^2 \cos x^2$.

(1) Les relations (130) *p.* *227* *donnent les symboles de première espèce :*

$$\begin{cases} \Gamma_{221} = \Gamma_{212} = \frac{1}{2}\, g_{22,1} \\ \Gamma_{331} = \Gamma_{313} = \frac{1}{2}\, g_{33,1} \\ \Gamma_{332} = \Gamma_{323} = \frac{1}{2}\, g_{33,2} \\ \Gamma_{122} = -\frac{1}{2}\, g_{22,1} \\ \Gamma_{133} = -\frac{1}{2}\, g_{33,1} \\ \Gamma_{233} = -\frac{1}{2}\, g_{33,2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{221} = \Gamma_{212} = x^1 \\ \Gamma_{331} = \Gamma_{313} = x^1 \sin^2 x^2 \\ \Gamma_{332} = \Gamma_{323} = \left(x^1\right)^2 \sin x^2 \cos x^2 \\ \Gamma_{122} = -x^1 \\ \Gamma_{133} = -x^1 \sin^2 x^2 \\ \Gamma_{233} = -\left(x^1\right)^2 \sin x^2 \cos x^2 \end{cases}$$

(2) Les relations (131) *p.* *227* *donnent les symboles de deuxième espèce :*

$$\begin{cases} {\Gamma^2}_{21} = {\Gamma^2}_{12} = \Gamma_{221}/g_{22} \\ {\Gamma^3}_{31} = {\Gamma^3}_{13} = \Gamma_{331}/g_{33} \\ {\Gamma^3}_{32} = {\Gamma^3}_{23} = \Gamma_{332}/g_{33} \\ {\Gamma^1}_{22} = \Gamma_{122}/g_{11} \\ {\Gamma^1}_{33} = \Gamma_{133}/g_{11} \\ {\Gamma^2}_{33} = \Gamma_{233}/g_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} {\Gamma^2}_{21} = {\Gamma^2}_{12} = 1/x^1 \\ {\Gamma^3}_{31} = {\Gamma^3}_{13} = 1/x^1 \\ {\Gamma^3}_{32} = {\Gamma^3}_{23} = \cot x^2 \\ {\Gamma^1}_{22} = -x^1 \\ {\Gamma^1}_{33} = -x^1 \sin^2 x^2 \\ {\Gamma^2}_{33} = -\sin x^2 \cos x^2 \end{cases}$$

EXEMPLE 21.4.5. *Symboles de Christoffel à la surface d'une sphère*
En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)*, à la surface d'une sphère de rayon* r*, en se servant de l'exemple précédent :*

(1) Les relations (130) *p.* *227* *donnent les symboles de première espèce :*

$$\begin{cases} \Gamma_{332} = \Gamma_{323} = \frac{1}{2}\, g_{33,2} \\ \Gamma_{233} = -\frac{1}{2}\, g_{33,2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{332} = \Gamma_{323} = \left(x^1\right)^2 \sin x^2 \cos x^2 \\ \Gamma_{233} = -\left(x^1\right)^2 \sin x^2 \cos x^2 \end{cases}$$

(2) Les relations (131) *p.* *227* *donnent les symboles de deuxième espèce :*

$$\begin{cases} {\Gamma^3}_{32} = {\Gamma^3}_{23} = \Gamma_{332}/g_{33} \\ {\Gamma^2}_{33} = \Gamma_{233}/g_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} {\Gamma^3}_{32} = {\Gamma^3}_{23} = \cot x^2 \\ {\Gamma^2}_{33} = -\sin x^2 \cos x^2 \end{cases}$$

EXEMPLE 21.4.6. *Symboles de Christoffel de deuxième espèce, pour la métrique de Schwarzschild*
Les symboles de Christoffel ayant trois indices, dans un espace de dimension quatre ils ont $4^3 = 64$ *composantes. Leur symétrie par rapport à deux indices réduit le nombre de composantes indépendantes à* $4 \times (8+2) = 40$ *(la moitié de la matrice* 4×4 *des indices symétriques, plus la moitié de ses éléments diagonaux, le tout fois* 4*).*

Les relations (131) p. 227 en coordonnées rectangulaires nous donnent :

$$\begin{cases}{\Gamma^0}_{00} = g_{00,0}/(2g_{00})\\ {\Gamma^0}_{01} = g_{00,1}/(2g_{00})\\ {\Gamma^0}_{02} = g_{00,2}/(2g_{00})\\ {\Gamma^0}_{03} = g_{00,3}/(2g_{00})\\ {\Gamma^0}_{11} = -g_{11,0}/(2g_{00})\\ {\Gamma^0}_{22} = -g_{22,0}/(2g_{00})\\ {\Gamma^0}_{33} = -g_{33,0}/(2g_{00})\end{cases} \begin{cases}{\Gamma^1}_{11} = g_{11,1}/(2g_{11})\\ {\Gamma^1}_{10} = g_{11,0}/(2g_{11})\\ {\Gamma^1}_{12} = g_{11,2}/(2g_{11})\\ {\Gamma^1}_{13} = g_{11,3}/(2g_{11})\\ {\Gamma^1}_{00} = -g_{00,1}/(2g_{11})\\ {\Gamma^1}_{22} = -g_{22,1}/(2g_{11})\\ {\Gamma^1}_{33} = -g_{33,1}/(2g_{11})\end{cases} \begin{cases}{\Gamma^2}_{22} = g_{22,2}/(2g_{22})\\ {\Gamma^2}_{20} = g_{22,0}/(2g_{22})\\ {\Gamma^2}_{21} = g_{22,1}/(2g_{22})\\ {\Gamma^2}_{23} = g_{22,3}/(2g_{22})\\ {\Gamma^2}_{00} = -g_{00,2}/(2g_{22})\\ {\Gamma^2}_{11} = -g_{11,2}/(2g_{22})\\ {\Gamma^2}_{33} = -g_{33,2}/(2g_{22})\end{cases} \begin{cases}{\Gamma^3}_{33} = g_{33,3}/(2g_{33})\\ {\Gamma^3}_{30} = g_{33,0}/(2g_{33})\\ {\Gamma^3}_{31} = g_{33,1}/(2g_{33})\\ {\Gamma^3}_{32} = g_{33,3}/(2g_{33})\\ {\Gamma^3}_{00} = -g_{00,3}/(2g_{33})\\ {\Gamma^3}_{11} = -g_{11,3}/(2g_{33})\\ {\Gamma^3}_{22} = -g_{22,3}/(2g_{33})\end{cases}$$

g_{00} et g_{11} ne sont fonction que des coordonnées x^0 et x^1, g_{22} n'est fonction que de x^1, et g_{33} n'est fonction que de x^1 et x^2. Donc

$$g_{00,2} = g_{00,3} = g_{11,2} = g_{11,3} = g_{22,0} = g_{22,2} = g_{22,3} = g_{33,0} = g_{33,3} = 0$$

$$\begin{cases}{\Gamma^0}_{00} = g_{00,0}/(2g_{00})\\ {\Gamma^0}_{01} = g_{00,1}/(2g_{00})\\ {\Gamma^0}_{11} = -g_{11,0}/(2g_{00})\end{cases} \begin{cases}{\Gamma^1}_{11} = g_{11,1}/(2g_{11})\\ {\Gamma^1}_{10} = g_{11,0}/(2g_{11})\\ {\Gamma^1}_{00} = -g_{00,1}/(2g_{11})\\ {\Gamma^1}_{22} = -g_{22,1}/(2g_{11})\\ {\Gamma^1}_{33} = -g_{33,1}/(2g_{11})\end{cases} \begin{cases}{\Gamma^2}_{21} = g_{22,1}/(2g_{22})\\ {\Gamma^2}_{33} = -g_{33,2}/(2g_{22})\end{cases} \begin{cases}{\Gamma^3}_{31} = g_{33,1}/(2g_{33})\\ {\Gamma^3}_{32} = g_{33,2}/(2g_{33})\end{cases}$$

Notons par un point la dérivation par rapport à ct et par un prime celle par rapport à r. Avec le tenseur métrique de Schwarzschild (55) p. 103 :

$$\begin{cases}{\Gamma^0}_{00} = \frac{1}{2}\,\dot{\alpha}\\ {\Gamma^0}_{01} = \frac{1}{2}\,\alpha'\\ {\Gamma^0}_{11} = \frac{1}{2}\,\dot{\beta}e^{\beta-\alpha}\end{cases} \begin{cases}{\Gamma^1}_{11} = \frac{1}{2}\,\beta'\\ {\Gamma^1}_{10} = \frac{1}{2}\,\dot{\beta}\\ {\Gamma^1}_{00} = \frac{1}{2}\,\alpha' e^{\alpha-\beta}\\ {\Gamma^1}_{22} = -re^{-\beta}\\ {\Gamma^1}_{33} = -r\sin^2(\theta)e^{-\beta}\end{cases} \begin{cases}{\Gamma^2}_{21} = 1/r\\ {\Gamma^2}_{33} = -\sin(\theta)\cos(\theta)\end{cases} \begin{cases}{\Gamma^3}_{31} = 1/r\\ {\Gamma^3}_{32} = \cot(\theta)\end{cases} \tag{132}$$

21.4.8 Formules de Christoffel

Démontrons les formules de Christoffel en partant du changement de base suivant, $\forall i$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{i'} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,\mathbf{e}_j\\
d\mathbf{e}_{i'} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,d\mathbf{e}_j + d\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\right)\mathbf{e}_j\\
{\omega^{k'}}_{i'}\mathbf{e}_{k'} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,{\omega^j}_l\,\mathbf{e}_l + d\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\right)\mathbf{e}_j\\
&= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,{\omega^j}_l\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l}\,\mathbf{e}_{k'} + d\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\right)\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\mathbf{e}_{k'}
\end{aligned}$$

On simplifie et on réarrange les termes :

$$\begin{aligned}
\forall i,k \quad \omega^{k'}{}_{i'} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l}\,\omega^j{}_l + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,d\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\right)\\
\Gamma^{k'}{}_{i'm'}\,dx^{m'} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l}\,\Gamma^l{}_{jn}\,dx^n + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{m'}\partial x^{i'}}\,dx^{m'}\\
&= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l}\,\Gamma^l{}_{jn}\,\frac{\partial x^n}{\partial x^{m'}}\,dx^{m'} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{m'}\partial x^{i'}}\,dx^{m'}\\
\forall i,k,m \quad \Gamma^{k'}{}_{i'm'} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l}\,\frac{\partial x^n}{\partial x^{m'}}\,\Gamma^l{}_{jn} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{m'}\partial x^{i'}}
\end{aligned}$$

Les symboles de Christoffel ne sont pas des tenseurs à cause de la présence du second terme du membre de droite. De même, en inversant le rôle des variables, $\forall i,k,m$:

$$\Gamma^k{}_{im} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}}\,\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^m}\,\Gamma^{l'}{}_{j'n'} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}}\,\frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^m \partial x^i} \tag{133}$$

Le second terme du membre de droite étant symétrique par rapport aux indices i et m nous pouvons le supprimer pour former le tenseur

$$\begin{aligned}
S^k{}_{im} &= \Gamma^k{}_{im} - \Gamma^k{}_{mi}\\
&= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}}\,\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^m}\,S^{l'}{}_{j'n'}
\end{aligned}$$

appelé *tenseur de torsion* de l'espace.

21.5 Dérivée ordinaire le long d'une courbe

Dans un espace ponctuel $\mathcal{E}_n$ rapporté au système de coordonnées (x^i), soit une courbe $\mathscr{C}(\lambda)$ d'équations paramétriques $x^i = x^i(\lambda)$. Une variation infinitésimale $d\lambda$ du paramètre fait passer d'un point de la courbe à un autre point de la courbe infiniment proche. Soit un champ de vecteurs $\mathbf{u}[u^i(x^j(\lambda))]$ défini le long de $\mathscr{C}$. Dérivons par rapport au paramètre λ la loi de transformation par changement de base naturelle des composantes contravariantes de ce champ de vecteurs le long de la courbe $\mathscr{C}(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
\forall i \quad u^{i'} &= u^j\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\\
\forall i \quad \frac{du^{i'}}{d\lambda} &= \frac{du^j}{d\lambda}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} + u^j\,\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}(x^k)\right]\\
&= \frac{du^j}{d\lambda}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} + u^j\,\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^j}\,\frac{dx^k}{d\lambda}
\end{aligned}$$

La dérivée de $\mathbf{u}$ le long de la courbe n'est pas un tenseur à cause de la présence du second membre. Si les $x^{i'}$ sont des fonctions affines des x^j alors $\partial^2_{kj} x^{i'} = 0$, mais pour être un tenseur la relation de transformation doit être valable quel que soit le changement de coordonnées.

Soit $\mathbf{t}(s) = d\mathbf{x}/ds$ le champ de vecteurs tangents le long de la courbe $\mathscr{C}(s)$ de paramètre l'abscisse curviligne s. La courbure de $\mathscr{C}(s)$ est le taux de variation du vecteur tangent en fonction de la distance :

$$\kappa = \left\|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right\|$$

$d\mathbf{t}/ds$ n'étant pas un tenseur, la courbure ne sera pas invariante si l'on passe en coordonnées curvilignes. Or la courbure est une notion intrinsèque, indépendante du système de coordonnées. Il faut donc redéfinir la dérivation des vecteurs, donc des tenseurs.

21.6 Dérivée partielle ordinaire

Dans un espace ponctuel $\mathcal{E}_n$ rapporté à un système de coordonnées (x^k), soit un vecteur $\mathbf{u}\,(u^i)$. La dérivation partielle ordinaire par rapport aux coordonnées de la loi de transformation des composantes contravariantes de ce vecteur s'écrit :

$$\begin{aligned}
\forall i \quad u^{i'} &= u^k \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \\
\forall i,j \quad \frac{\partial u^{i'}}{\partial x^{j'}} &= \frac{\partial}{\partial x^{j'}}\left(u^k \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\right) \\
\partial_{j'} u^{i'} &= \frac{\partial}{\partial x^l}\left(u^k \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} \\
&= \frac{\partial u^k}{\partial x^l}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} + u^k \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^l \partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}}
\end{aligned}$$

$\partial_{j'} u^{i'}$ n'est pas un tenseur à cause de la présence du second membre.

De même pour les composantes covariantes d'un vecteur $\mathbf{u}\,(u_i)$:

$$\begin{aligned}
\forall i \quad u_{i'} &= u_k \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \\
\forall i,j \quad \frac{\partial u_{i'}}{\partial x^{j'}} &= \frac{\partial}{\partial x^{j'}}\left(u_k \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\right) \\
\partial_{j'} u_{i'} &= \frac{\partial}{\partial x^l}\left(u_k \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\right)\frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} \\
&= \frac{\partial u_k}{\partial x^l}\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} + u_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^l \partial x^{i'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}}
\end{aligned}$$

$\partial_{j'} u_{i'}$ n'est pas un tenseur à cause de la présence du second membre.

21.7 Différentielle absolue d'un vecteur

21.7.1 Vecteur en composantes contravariantes

Dans un espace ponctuel $\mathcal{E}_n$ rapporté à un système de coordonnées (x^i), soit un champ de vecteurs $\mathbf{u}(u^i)$. Lorsque l'on passe d'un point à un point infiniment proche, les composantes contravariantes u^i du vecteur $\mathbf{u}$ changent, ainsi que le repère naturel $(\mathbf{e}_i)$. Avec les relations

(112) p. 222, et (113) p. 222 :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} &= u^i \mathbf{e}_i \\
&= u^i(x^k)\mathbf{e}_i(x^k) \\
d\mathbf{u} &= du^i \mathbf{e}_i + u^i d\mathbf{e}_i \\
&= du^i \mathbf{e}_i + u^i \omega^j{}_i \mathbf{e}_j \\
&= \left(du^i + u^j \omega^i{}_j\right) \mathbf{e}_i \\
&= \left(\partial_j u^i dx^j + u^k \Gamma^i{}_{kj}\, dx^j\right) \mathbf{e}_i \\
&= \left(\partial_j u^i + u^k \Gamma^i{}_{kj}\right) dx^j \mathbf{e}_i \qquad (134) \\
&= Du^i \mathbf{e}_i
\end{aligned}
$$

Définition 21.7.1. *$d\mathbf{u}$ est le vecteur différentielle absolue du vecteur $\mathbf{u}$.*

Définition 21.7.2. *Les Du^i sont les composantes contravariantes du vecteur différentielle absolue $d\mathbf{u}$, appelées différentielles absolues des composantes contravariantes u^i.*

Remarque 36. *Les du^i ne sont pas les composantes contravariantes d'un vecteur.*

Remarque 37. *Les $\partial_j u^i$ ne sont pas les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux.*

Remarque 38. *Nous avons deux façons d'écrire le vecteur final $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$:*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} + d\mathbf{u} &= u^i \mathbf{e}_i + du^i \mathbf{e}_i + u^i d\mathbf{e}_i \\
&= u^i \left(\mathbf{e}_i + d\mathbf{e}_i\right) + du^i \mathbf{e}_i
\end{aligned}
$$

et,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} + d\mathbf{u} &= \left(u^i + du^i\right) \mathbf{e}_i + u^i d\mathbf{e}_i \\
&= \left(u^i + du^i + u^j \omega^i{}_j\right) \mathbf{e}_i
\end{aligned}
$$

21.7.2 Vecteur en composantes covariantes

Dans un espace ponctuel $\mathcal{E}_n$, soit $\mathbf{v}(v^i)$ un champ de vecteurs *uniforme* et arbitraire. Avec les relations (112) p. 222 :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \mathbf{c}^{ste} \\
d\left(v^i \mathbf{e}_i\right) &= 0 \\
dv^j \mathbf{e}_j + v^j d\mathbf{e}_j &= 0 \\
\left(dv^j + v^i \omega^j{}_i\right) \mathbf{e}_j &= 0 \\
\forall j \quad dv^j &= -v^i \omega^j{}_i
\end{aligned}
$$

Soit $\mathbf{u}$ un champ de vecteurs de composantes covariantes u_i. Avec les relations (113) p. 222, leur produit scalaire donne :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_i v^i \\
d\left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\right) &= d\left(u_i v^i\right) \\
d\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot d\mathbf{v} &= v^i du_i + u_j dv^j \\
d\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= v^i du_i + u_j dv^j \\
d\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i v^i &= \left(du_i - u_j {\omega^j}_i\right) v^i \\
\forall i \quad d\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i &= du_i - u_j {\omega^j}_i \\
&= \left(\partial_j u^i - u_k {\Gamma^k}_{ij}\right) dx^j \\
&= Du_i
\end{aligned}$$

Définition 21.7.3. *Les Du_i sont les composantes covariantes du vecteur différentielle absolue $d\mathbf{u}$, appelées différentielles absolues des composantes covariantes u_i.*

Remarque 39. *Les du_i ne sont pas les composantes covariantes d'un vecteur.*

Remarque 40. *Les $\partial_j u_i$ ne sont pas les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux.*

21.8 Dérivée covariante d'un vecteur

21.8.1 Vecteur en composantes contravariantes

La dérivée d'un vecteur est la dérivée de ses composantes et des vecteurs de base. Avec les relations (115) p. 222,

$$\begin{aligned}
\forall j \quad \partial_j \mathbf{u} &= \partial_j \left(u^i \mathbf{e}_i\right) \\
&= \mathbf{e}_i \partial_j u^i + u^k \partial_j \mathbf{e}_k \\
&= \left(\partial_j u^i + u^k {\Gamma^i}_{kj}\right) \mathbf{e}_i \\
&= \nabla_j u^i \mathbf{e}_i
\end{aligned}$$

Définition 21.8.1. *Les $\nabla_j u^i$ sont les composantes mixtes du vecteur dérivée $\partial_j \mathbf{u}$, appelées dérivées covariantes des composantes contravariantes du vecteur $\mathbf{u}$ ou dérivée covariante du vecteur $\mathbf{u}$.*

Notation 25. *Nous emploierons également les notations suivantes :*

$$\forall i,j \quad u^i_{\,;j} \triangleq \partial_j u^i + u^k {\Gamma^i}_{jk}$$
$$\forall i,j \quad D_j u^i \triangleq \partial_j u^i + u^k {\Gamma^i}_{jk}$$

Avec les relations (134) p. 233 :

$$\forall i \quad Du^i = \nabla_j u^i \, dx^j \tag{135}$$

D'après la définition 21.7.2 p. 233 des Du^i, les $\nabla_j u^i \, dx^j$ sont les composantes contravariantes du vecteur différentielle absolue $d\mathbf{u}$. D'après la relation (10) p. 29, les dx^j sont les composantes contravariantes d'un vecteur. Par conséquent les $\nabla_j u^i$ sont les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux.

21.8.2 Vecteur en composantes covariantes

Dans un espace ponctuel $\mathcal{E}_n$, soit $\mathbf{v}$ un champ de vecteurs uniforme et arbitraire, de composantes contravariantes v^i :

$$\mathbf{v} = \mathbf{c}^{ste}$$
$$\forall j \quad \partial_j \left(v^i \mathbf{e}_i\right) = 0$$
$$\forall j \quad \mathbf{e}_i \partial_j v^i + v^k \partial_j \mathbf{e}_k = 0$$
$$\forall j \quad \left(\partial_j v^i + v^k {\Gamma^i}_{kj}\right) \mathbf{e}_i = 0$$
$$\forall i,j \quad \partial_j v^i = -v^k {\Gamma^i}_{kj}$$

Soit $\mathbf{u}$ un champ de vecteurs de composantes covariantes u_i. Leur produit scalaire donne :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v^i$$
$$\forall j \quad \partial_j \left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\right) = \partial_j \left(u_i v^i\right)$$
$$\forall j \quad \partial_j \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \partial_j \mathbf{v} = v^i \partial_j u_i + u_i \partial_j v^i$$
$$\forall j \quad \partial_j \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = v^i \partial_j u_i - u_i v^k {\Gamma^i}_{kj}$$
$$\forall j \quad \partial_j \mathbf{u} \cdot v^i \mathbf{e}_i = \left(\partial_j u_i - u_k {\Gamma^k}_{ij}\right) v^i$$
$$\begin{aligned} \forall i,j \quad \partial_j \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i &= \partial_j u_i - u_k {\Gamma^k}_{ij} \\ &= \nabla_j u_i \end{aligned}$$

Définition 21.8.2. *Les $\nabla_j u_i$ sont les composantes covariantes du vecteur dérivée $\partial_j \mathbf{u}$, appelées dérivées covariantes des composantes covariantes du vecteur $\mathbf{u}$, ou dérivée covariante du covecteur $\tilde{u}$.*

Notation 26. *Nous emploierons également la notation suivante :*

$$\forall i,j \quad u_{i\,;j} \triangleq \partial_j u_i - u_k {\Gamma^k}_{ij}$$

Avec la définition 21.7.3 p. 234 :

$$\forall i \quad Du_i = \nabla_j u_i \, dx^j$$

D'après la définition 21.7.3 p. 234 des Du_i, les $\nabla_j u_i \, dx^j$ sont les composantes covariantes du vecteur différentielle absolue $d\mathbf{u}$. D'après la relation (10) p. 29, les dx^j sont les composantes contravariantes d'un vecteur. Par conséquent, les quantités $\nabla_j u_i$ sont les composantes deux fois covariantes d'un tenseur d'ordre deux.

Résumé du passage des coordonnées rectilignes aux coordonnées curvilignes :

$$
\begin{aligned}
d\mathbf{u} &= \partial_j u^i \, dx^j \mathbf{e}_i & &\rightarrow & d\mathbf{u} &= \nabla_j u^i \, dx^j \mathbf{e}_i \\
d\mathbf{u} &= \partial_j u_i \, dx^j \mathbf{e}^i & &\rightarrow & d\mathbf{u} &= \nabla_j u_i \, dx^j \mathbf{e}^i
\end{aligned}
$$

21.9 Dérivée absolue le long d'une courbe

Dans un espace ponctuel $\mathcal{E}_n$ rapporté à un système de coordonnées (x^i), soit $\mathscr{C}(\lambda)$ une courbe d'équation paramétrique $x^i = x^i(\lambda)$. Soit un champ de vecteurs $\mathbf{u}[u^i(x^j(\lambda))]$ défini le long de $\mathscr{C}(\lambda)$. À partir des relations (134) p. 233, on définit la dérivée absolue par rapport au paramètre λ du champ de vecteurs $\mathbf{u}$ le long de la courbe $\mathscr{C}(\lambda)$, par :

$$
\forall i \quad \frac{Du^i}{d\lambda} \triangleq \frac{du^i}{d\lambda} + u^k \Gamma^i{}_{kj} \frac{dx^j}{d\lambda} \tag{136}
$$

Il s'agit en fait de la multiplication contractée du tenseur $\nabla_j u^i$ avec le vecteur $dx^j/d\lambda$ tangent à $\mathscr{C}(\lambda)$. En effet :

$$
\begin{aligned}
\forall i \quad \nabla_j u^i \frac{dx^j}{d\lambda} &= \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + u^k \Gamma^i{}_{kj} \right) \frac{dx^j}{d\lambda} \\
&= \frac{du^i}{d\lambda} + u^k \Gamma^i{}_{kj} \frac{dx^j}{d\lambda}
\end{aligned}
$$

21.9.1 Vecteur accélération d'un point mobile

Dans l'espace ponctuel $\mathcal{E}_n$, considérons un point mobile M dont les coordonnées curvilignes (x^i) sont fonction du temps, $M(x^i(t))$. Le vecteur position est particulier, il s'écrit

$$
\boldsymbol{OM}(t) = x^i(t)\mathbf{e}_i
$$

où $\mathbf{e}_i$ n'est jamais fonction du temps. Il relie l'origine de l'ancien repère à l'origine du nouveau repère, et n'est exprimé que dans l'ancienne base. Par conséquent, dans la base naturelle locale $(\mathbf{e}_i)$, sa différentielle est donnée par la relation (10) p. 29

$$
d\boldsymbol{M} = dx^i \mathbf{e}_i
$$

et non par la définition 21.7.2 p. 233. Le vecteur vitesse a alors pour expression :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &\triangleq \frac{d\boldsymbol{M}}{dt} \\
v^i \mathbf{e}_i &= \frac{dx^i \mathbf{e}_i}{dt}
\end{aligned}
$$

$$
\forall i \quad v^i = \dot{x}^i \tag{137}
$$

NOTATION 27. *Le point est l'opérateur de dérivation totale par rapport au temps.*

Le vecteur accélération a pour expression :

$$\boldsymbol{\gamma} \triangleq \dot{\mathbf{v}}$$
$$\gamma^i\,\mathbf{e}_i = \frac{Dv^i}{dt}\,\mathbf{e}_i$$
$$\forall i \quad \gamma^i = \frac{Dv^i}{dt}$$

Avec la définition 21.7.3 p. 234 :

$$\boxed{\forall i \quad \gamma^i = \dot{v}^i + \Gamma^i{}_{jk} v^j v^k} \tag{138}$$

REMARQUE 41. *Le vecteur dérivée absolue d'un vecteur le long d'une courbe est unique. En effet, supposons qu'il y en ait deux, alors en coordonnées rectilignes ou les symboles de Christoffel sont nuls, nous aurions :*

$$\frac{D\mathbf{u}}{d\lambda} = \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \quad \textit{et} \quad \frac{\delta\mathbf{u}}{\delta\lambda} = \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \quad \textit{implique} \quad \frac{D\mathbf{u}}{d\lambda} = \frac{\delta\mathbf{u}}{\delta\lambda}$$

Or d'après le paragraphe 20.10 p. 212, une équation tensorielle valable dans un système de coordonnées est valable dans tout système de coordonnées.

EXEMPLE 21.9.1. *Une particule se déplace d'un mouvement circulaire uniforme ayant pour équations en coordonnées polaires $\rho = c^{ste}$, $\theta = \omega t$. Cherchons l'expression de son accélération. En se servant des symboles de Christoffel calculés dans l'exemple 21.4.3 p. 227 :*

$$\begin{cases} \gamma^\rho = \ddot{\rho} + \Gamma^\rho{}_{\theta\theta}\dot{\theta}\dot{\theta} \\ \gamma^\theta = \ddot{\theta} + \Gamma^\theta{}_{\theta\rho}\dot{\theta}\dot{\rho} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \gamma^\rho = -\rho\dot{\theta}^2 = -\rho\omega^2 \\ \gamma^\theta = 0 \end{cases}$$

D'après la définition 11.6.1 p. 94 de la norme d'un vecteur :

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma} \\ &= \gamma^i\mathbf{e}_i \cdot \gamma^j\mathbf{e}_j \\ \gamma &= \sqrt{g_{ij}\gamma^i\gamma^j} \\ &= \sqrt{g_{\rho\rho}\gamma^\rho\gamma^\rho} \\ &= \rho\omega^2 \end{aligned}$$

21.10 Géodésiques de l'espace euclidien

L'accélération du point M est nulle ssi sa trajectoire est une géodésique de $\mathcal{E}_n$. La trajectoire à accélération nulle est invariante par changement de coordonnées. Les géodésiques sont donc indépendantes du choix du système de coordonnées, dans les espaces euclidiens et non-euclidiens. D'après (137) et (138) p. 236, les coordonnées $x^i(t)$ d'une géodésique de $\mathcal{E}_n$ sont solutions du système d'équations différentielles :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \ddot{x}^i + \Gamma^i{}_{kj}\dot{x}^k\dot{x}^j = 0 \tag{139}$$

Une géodésique est complètement déterminée par un point et sa tangente en ce point. Soit $\mathbf{u}$ le *vecteur unitaire tangent* à la trajectoire du point M et s l'abscisse curviligne. On le définit à partir du vecteur vitesse,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\boldsymbol{M}}{dt}\\ &= \frac{d\boldsymbol{M}}{ds}\frac{ds}{dt}\\ &= \mathbf{u}v\end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\boxed{\mathbf{u} \triangleq \frac{d\boldsymbol{M}}{ds}} \tag{140}$$

Le vecteur $\mathbf{u}$ est unitaire puisque

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}/v$$

Il a pour composantes :

$$\forall i \quad u^i = \frac{dx^i}{ds}$$

Adoptons comme paramètre indépendant à la place du temps, l'abscisse curviligne s du point M le long de la géodésique de $\mathcal{E}_n$, comptée à partir d'une origine fixe. Le système d'équations différentielles (139) devient

$$\boxed{\forall i = 1, \ldots, n \qquad \frac{du^i}{ds} + \Gamma^i{}_{kj}\, u^k u^j = 0} \tag{141}$$

où $\mathbf{u}$ est le vecteur unitaire tangent porté par la géodésique.

21.10.1 Exemples

Exemple 21.10.1. *En coordonnées rectilignes, donc dans un espace euclidien ou pseudo-euclidien, les g_{ij} étant constants les symboles de Christoffel sont nuls. Le système d'équations différentielles* (139) *s'écrit :*

$$\begin{aligned}&\forall i \quad \frac{d^2x^i}{ds^2} = 0\\ &\forall i \quad \frac{dx^i}{ds} = a_i\\ &\forall i \quad x^i = a_i s + b_i\end{aligned}$$

Dans l'espace ponctuel euclidien $\mathcal{E}_2$ (le plan) rattaché au système de coordonnées rectilignes (x, y) :

$$\begin{cases} x = a_1 s + b_1 \\ y = a_2 s + b_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s = (x - b_1)/a_1 \\ y = \dfrac{a_2}{a_1}x + b_2 - \dfrac{a_2}{a_1}b_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = ax + b$$

Exemple 21.10.2. *La droite verticale d'équation $x = a$ dans un système rectangulaire a pour équation polaire $\rho = a/\cos(\theta)$. Montrons que cette équation vérifie l'équation* (141).

Paramétrons l'équation de la droite :

$$\begin{cases} \rho = a/\cos(\lambda) \\ \theta = \lambda \end{cases}$$

Avec la relation (110) *p.* *215* *:*

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\lambda} &= \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}} \\ &= \sqrt{\rho'^2 + \rho^2\theta'^2} \end{aligned}$$

Le long de la droite :

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\lambda} &= \sqrt{\left[\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{a}{\cos(\lambda)}\right)\right]^2 + \left(\frac{a}{\cos(\lambda)}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{d\lambda}\right)^2} \\ &= |a|\sqrt{\frac{\sin^2\lambda}{\cos^4\lambda} + \frac{1}{\cos^2(\lambda)}} \\ &= |a|/\cos^2(\lambda) \\ \frac{d\lambda}{ds} &= \cos^2(\lambda)/|a| \end{aligned}$$

Ainsi, pour toute fonction $x(\lambda)$ le long de la droite :

$$\begin{aligned} \frac{dx(\lambda)}{ds} &= \frac{dx}{d\lambda}\frac{d\lambda}{ds} \\ &= \frac{\cos^2(\lambda)}{|a|}\frac{dx}{d\lambda} \\ \frac{d^2x(\lambda)}{ds^2} &= \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\cos^2(\lambda)}{|a|}\frac{dx}{d\lambda}\right)\frac{d\lambda}{ds} \\ &= \left(\frac{-2\cos(\lambda)\sin(\lambda)}{|a|}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{\cos^2(\lambda)}{|a|}\frac{d^2x}{d\lambda^2}\right)\frac{\cos^2(\lambda)}{|a|} \\ &= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2}\frac{d^2x}{d\lambda^2} - \frac{2\sin(\lambda)\cos^3(\lambda)}{a^2}\frac{dx}{d\lambda} \end{aligned}$$

L'équation de droite pour $\rho(\lambda)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\rho}{ds^2} + \Gamma^\rho{}_{\theta\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{d\theta}{ds} &= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2}\frac{d^2\rho}{d(\lambda)^2} - \frac{2\sin(\lambda)\cos^3(\lambda)}{a^2}\frac{d\rho}{d\lambda} + (-\rho)\frac{\cos^4(\lambda)}{a^2}\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 \\ &= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2}\left(\rho'' - 2\rho'\tan(\lambda) - \rho\theta'^2\right) \\ &= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2}\left(\frac{a\cos^3(\lambda) + 2a\sin^2(\lambda)\cos(\lambda)}{\cos^4(\lambda)} - \frac{2a\sin(\lambda)}{\cos^2(\lambda)}\tan(\lambda) - \frac{a}{\cos(\lambda)}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De même, l'équation de droite pour $\theta(\lambda)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\theta}{ds^2} + {\Gamma^\theta}_{\rho\theta} \frac{d\rho}{ds}\frac{d\theta}{ds} &= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2}\,\frac{d^2\theta}{d(\lambda)^2} - \frac{2\sin(\lambda)\cos^3(\lambda)}{a^2}\,\frac{d\theta}{d\lambda} + \frac{2}{\rho}\frac{\cos^4(\lambda)}{a^2}\,\frac{d\rho}{d\lambda}\frac{d\theta}{d\lambda} \\
&= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2}\left(\theta'' - 2\theta'\tan(\lambda) + \frac{2\rho'\theta'}{\rho}\right) \\
&= \frac{\cos^4(\lambda)}{a^2}\left(-2\tan(\lambda) + \frac{2a\sin(\lambda)\cos(\lambda)}{a\cos^2(\lambda)}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

21.11 Différentielle absolue d'un tenseur

Les considérations du paragraphe 21.7 p. 232 sur la différentielle absolue d'un vecteur s'étendent à un champ de tenseur. Soit $\mathcal{E}_n$ un espace ponctuel euclidien rapporté à un système de coordonnées curvilignes (x^i). Soit un champ de tenseurs $\mathbf{T}$ d'ordre trois, deux fois covariant et une fois contravariant, de composantes ${t_{ij}}^k$:

$$\mathbf{T} = {t_{ij}}^k\,\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k$$

Lorsque l'on passe d'un point à un point infiniment proche, les composantes ${t_{ij}}^k$ du tenseur $\mathbf{T}$ changent, ainsi que le repère naturel $\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k$:

$$\begin{aligned}
d\mathbf{T} &= d\left({t_{ij}}^k\,\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k\right) \\
&= d{t_{ij}}^k\left(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k\right) + {t_{ij}}^k d\left(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k\right)
\end{aligned}$$

Définition 21.11.1. *Différentielle absolue d'un tenseur*
$d\mathbf{T}$ est le tenseur différentielle absolue du tenseur $\mathbf{T}$.

Définition 21.11.2. *Différentielles absolues des composantes d'un tenseur*
Les $D{t_{ij}}^k$ sont les composantes du tenseur différentielle absolue $d\mathbf{T}$.

$$d\mathbf{T} \triangleq D{t_{ij}}^k\,\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k$$

Pour trouver l'expression des $D{t_{ij}}^k$ nous utilisons la commutativité de la contraction et de la différentiation.

(1) La multiplication tensorielle de $\mathbf{T}$ avec trois champs de vecteurs uniformes donne :

$$\mathbf{T} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = {t_{ij}}^k u^l v^m w_n\,\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^n$$

où le champ de vecteur $\mathbf{w}$ est exprimé en composantes covariantes. La contraction complète de ce produit tensoriel $(i = l, j = m, k = n)$ donne le scalaire

$${t_{ij}}^k u^i v^j w_k$$

Différentions ce scalaire pour un déplacement infiniment petit :

$$d(t_{ij}{}^k u^i v^j w_k) = dt_{ij}{}^k u^i v^j w_k + t_{ij}{}^k du^i v^j w_k + t_{ij}{}^k u^i dv^j w_k + t_{ij}{}^k u^i v^j dw_k$$

Les champs de vecteurs étant uniformes, leurs différentielles absolues sont nulles et les définitions 21.7.2 p. 233 et 21.7.3 p. 234 donnent

$$\forall i \quad du^i = -u^l \omega^i{}_l \qquad ; \qquad \forall j \quad dv^j = -v^l \omega^j{}_l \qquad ; \qquad \forall k \quad dw_k = w_l \omega^l{}_k$$

$$\begin{aligned} d(t_{ij}{}^k u^i v^j w_k) &= dt_{ij}{}^k u^i v^j w_k - t_{ij}{}^k u^l \omega^i{}_l v^j w_k - t_{ij}{}^k u^i v^l \omega^j{}_l w_k + t_{ij}{}^k u^i v^j w_l \omega^l{}_k \\ &= dt_{ij}{}^k u^i v^j w_k - t_{lj}{}^k u^i \omega^l{}_i v^j w_k - t_{il}{}^k u^i v^j \omega^l{}_j w_k + t_{ij}{}^l u^i v^j w_k \omega^k{}_l \\ &= \left(dt_{ij}{}^k - t_{lj}{}^k \omega^l{}_i - t_{il}{}^k \omega^l{}_j + t_{ij}{}^l \omega^k{}_l \right) u^i v^j w_k \end{aligned}$$

(2) Les champs de vecteurs étant uniformes, différentions le produit tensoriel :

$$\begin{aligned} &d(\mathbf{T} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = d\left(t_{ij}{}^k u^l v^m w_n \, \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^n \right) \\ &\quad = \left(Dt_{ij}{}^k u^l v^m w_n + t_{ij}{}^k Du^l v^m w_n + t_{ij}{}^k u^l Dv^m w_n + t_{ij}{}^k u^l v^m Dw_n \right) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^n \\ &\quad = Dt_{ij}{}^k u^l v^m w_n \, \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^n \end{aligned}$$

Si nous contractons complètement ce produit tensoriel nous avons :

$$Dt_{ij}{}^k u^i v^j w_k = \left(dt_{ij}{}^k - t_{lj}{}^k \omega^l{}_i - t_{il}{}^k \omega^l{}_j + t_{ij}{}^l \omega^k{}_l \right) u^i v^j w_k$$

$$\boxed{\forall i, j, k \quad Dt_{ij}{}^k = dt_{ij}{}^k - t_{lj}{}^k \omega^l{}_i - t_{il}{}^k \omega^l{}_j + t_{ij}{}^l \omega^k{}_l} \tag{142}$$

21.12 Dérivée covariante d'un tenseur

À partir des relations (142) :

$$\begin{aligned} \forall i, j, k \quad Dt_{ij}{}^k &= \partial_m t_{ij}{}^k \, dx^m - t_{lj}{}^k \, \Gamma^l{}_{im} \, dx^m - t_{il}{}^k \, \Gamma^l{}_{jm} \, dx^m + t_{ij}{}^l \, \Gamma^k{}_{lm} \, dx^m \\ &= \left(\partial_m t_{ij}{}^k - t_{lj}{}^k \, \Gamma^l{}_{im} - t_{il}{}^k \, \Gamma^l{}_{jm} + t_{ij}{}^l \, \Gamma^k{}_{lm} \right) dx^m \\ &= \nabla_m t_{ij}{}^k \, dx^m \end{aligned}$$

Définition 21.12.1. *Dérivée covariante d'un tenseur*
Les composantes du tenseur dérivée covariante du tenseur $\mathbf{T}$ *s'écrivent*

$$\nabla_m t_{ij}{}^k = \partial_m t_{ij}{}^k - t_{lj}{}^k \, \Gamma^l{}_{im} - t_{il}{}^k \, \Gamma^l{}_{jm} + t_{ij}{}^l \, \Gamma^k{}_{lm}$$

21.13 Théorème de Ricci

Théorème 21.13.1. *Théorème de Ricci*
La différentielle absolue du tenseur fondamental est nulle :

$$\boxed{\forall i, j \quad Dg_{ij} = 0}$$

Démonstration. Appliquons les relations (142) p. 241 à un tenseur deux fois covariant, et utilisons (122) p. 224 :

$$\begin{aligned}\forall i,j \quad Dg_{ij} &= dg_{ij} - \omega^k{}_j g_{ik} - \omega^k{}_i g_{jk} \\ &= \omega^k{}_j g_{ik} + \omega^k{}_i g_{jk} - \omega^k{}_j g_{ik} - \omega^k{}_i g_{jk} \\ &= 0\end{aligned}$$

□

Par conséquent la dérivée covariante du tenseur métrique est nulle :

$$\begin{aligned}\forall i,j \quad Dg_{ij} &= 0 \\ \nabla_k g_{ij} dx^k &= 0 \\ \forall i,j,k \quad \nabla_k g_{ij} &= 0 \qquad (143)\end{aligned}$$

Le tenseur métrique se comporte comme une constante vis à vis de la dérivation covariante.

La dérivation covariante des symboles de Kronecker est nulle. En effet :

$$\begin{aligned}\forall j \quad t^i \delta_i^j &= t^j \\ \forall j,k \quad \nabla_k t^i \delta_i^j + t^i \nabla_k \delta_i^j &= \nabla_k t^j \\ \nabla_k t^j + t^i \nabla_k \delta_i^j &= \nabla_k t^j \\ \forall i,j,k \quad \nabla_k \delta_i^j &= 0\end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\forall j,l \quad g_{li} g^{ij} &= \delta_l^j \\ \forall j,k,l \quad \nabla_k g_{li} g^{ij} + g_{li} \nabla_k g^{ij} &= \nabla_k \delta_l^j \\ \forall i,j,k \quad \nabla_k g^{ij} &= 0 \\ \forall i,j \quad Dg^{ij} &= 0 \qquad (144)\end{aligned}$$

Par conséquent la dérivée covariante et la montée-descente des indices commutent :

$$\begin{aligned}\forall i,j,k \quad \nabla_k t_j^i &= \nabla_k \left(g^{il} t_{lj}\right) \\ &= g^{il} \nabla_k t_{lj}\end{aligned}$$

21.13.1 Identités de Ricci

À partir des relations (122) p. 224 :

$$\begin{aligned}\forall i,j \quad dg_{ij} &= \omega^k{}_j g_{ik} + \omega^k{}_i g_{jk} \\ \partial_h g_{ij}\, dx^h &= \Gamma^k{}_{jh}\, g_{ik} dx^h + \Gamma^k{}_{ih}\, g_{jk} dx^h \\ \forall h,i,j \quad \partial_h g_{ij} &= g_{ik}\, \Gamma^k{}_{jh} + g_{jk}\, \Gamma^k{}_{ih} \qquad (145)\end{aligned}$$

Ces relations constituent les identités de Ricci.

21.14 Opérateurs différentiels

21.14.1 Gradient d'un champ de scalaires

Le gradient est défini au paragraphe 18 p. 151 :

$$\forall i \quad \partial_i \phi \triangleq \mathbf{grad}\, \phi \cdot \mathbf{e}_i$$

21.14.2 Divergence d'un champ de vecteurs

Soit un champ de vecteurs $\mathbf{u}$ de composantes contravariantes u^i. Par contraction du tenseur dérivée covariante $\nabla_j u^i$ on obtient le scalaire

$$\operatorname{div} \mathbf{u} \triangleq \nabla_i u^i \tag{146}$$

appelé *divergence* du champ de vecteurs $\mathbf{u}$. En se servant de la définition 21.8.1 p. 234 de la dérivée covariante puis des symboles de Christoffel contractés, relation (129) p. 226 :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &\triangleq \partial_i u^i + u^j\, \Gamma^i{}_{ji} \\ &= \partial_i u^i + \frac{u^j}{\sqrt{|g|}}\, \partial_j \sqrt{|g|} \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\, \partial_i \left(u^i \sqrt{|g|} \right) \tag{147}$$

Dans un système de coordonnées rectilignes les symboles de Christoffel sont nuls :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \partial_i u^i \tag{148}$$

21.14.3 Divergence d'un champ de tenseurs

(1) Dans le cas d'un champ de tenseur 2 fois contravariant, d'après la définition de la dérivée covariante 21.12.1 p. 241 d'un tenseur :

$$\begin{aligned} \nabla_k t^{ij} &= \partial_k t^{ij} + t^{lj}\, \Gamma^i{}_{lk} + t^{il}\, \Gamma^j{}_{kl} \\ \nabla_i t^{ij} &= \partial_i t^{ij} + t^{lj}\, \Gamma^i{}_{li} + t^{il}\, \Gamma^j{}_{il} \end{aligned}$$

Si le tenseur est antisymétrique $t^{il} = -t^{li}$, alors le dernier terme est nul car :

$$\begin{aligned} t^{il}\, \Gamma^j{}_{il} &= t^{li}\, \Gamma^j{}_{li} \\ &= -t^{il}\, \Gamma^j{}_{il} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il reste :

$$\begin{aligned} \nabla_i t^{ij} &= \partial_i t^{ij} + t^{lj}\, \Gamma^i{}_{li} \\ &= \partial_i t^{ij} + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\, \partial_l \sqrt{|g|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\, \partial_i \left(t^{ij} \sqrt{|g|} \right) \end{aligned}$$

(2) Dans le cas d'un champ de tenseur mixte d'ordre deux :

$$\begin{aligned}
\nabla_k t^i{}_j &= \partial_k t^i{}_j + t^l{}_j \, \Gamma^i{}_{lk} - t^i{}_l \, \Gamma^l{}_{kj} \\
\nabla_i t^i{}_j &= \partial_i t^i{}_j + t^l{}_j \, \Gamma^i{}_{li} - t^i{}_l \, \Gamma^l{}_{ij} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \, \partial_l \left(t^l{}_j \sqrt{|g|} \right) - t^i{}_l \, \Gamma^l{}_{ij} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \, \partial_l \left(t^l{}_j \sqrt{|g|} \right) - \tfrac{1}{2} \, t^i{}_l \, g^{lh} \left(g_{hi,j} + g_{jh,i} - g_{ij,h} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \, \partial_l \left(t^l{}_j \sqrt{|g|} \right) - \tfrac{1}{2} \, t^{ih} \left(g_{hi,j} + g_{jh,i} - g_{ij,h} \right)
\end{aligned}$$

Si le tenseur est symétrique $t^{ih} = t^{ih}$ alors :

$$\begin{aligned}
t^{ih} g_{jh,i} &= t^{hi} g_{ji,h} \\
&= t^{ih} g_{ji,h}
\end{aligned}$$

$$\nabla_i t^i_j = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \, \partial_i \left(t^i_j \sqrt{|g|} \right) - \tfrac{1}{2} \, t^{ih} \, g_{hi,j}$$

21.14.4 Rotationnel d'un champ de vecteurs

Soit un champ de vecteurs $\mathbf{u}$ de composantes covariantes u_i. D'après la définition 21.8.2 p. 235, le tenseur dérivée covariante $\nabla_j u_i$ s'écrit :

$$\forall i, j \quad \nabla_j u_i = \partial_j u_i - u_k \, \Gamma^i{}_{kj}$$

En échangeant les indices j et i, et en utilisant la symétrie des symboles de Christoffel par rapport à leurs indices inférieurs :

$$\forall i, j \quad \nabla_i u_j = \partial_i u_j - u_k \, \Gamma^i{}_{kj}$$

si bien que :

$$\forall i, j \quad \nabla_j u_i - \nabla_i u_j = \partial_j u_i - \partial_i u_j$$

D'après le paragraphe 20.9.1 p. 206, la soustraction de deux tenseurs est un tenseur, par conséquent les quantités,

$$\boxed{\forall i, j \quad \mathrm{rot}_{ij} \mathbf{u} \triangleq \partial_j u_i - \partial_i u_j}$$

sont les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux

$$\mathbf{rot} \, \mathbf{u} = \left(\partial_j u_i - \partial_i u_j \right) \mathbf{e_i} \otimes \mathbf{e_j}$$

antisymétrique

$$\mathrm{rot}_{ij} \mathbf{u} = -\mathrm{rot}_{ji} \mathbf{u}$$

appelé *rotationnel* du vecteur $\mathbf{u}$.

Espace de dimension 3

Un tenseur antisymétrique d'ordre n possède n^2 composantes, dont $n(n-1)/2$ sont différentes. Dans le cas d'un espace à trois dimensions, et seulement dans ce cas, $3(3-1)/2 = 3$, le nombres de composantes « strictes » du tenseur est égal à la dimension de l'espace :

$$\mathbf{rot\,u} = \begin{pmatrix} 0 & u_{1,2} - u_{2,1} & u_{1,3} - u_{3,1} \\ -(u_{1,2} - u_{2,1}) & 0 & u_{2,3} - u_{3,2} \\ -(u_{1,3} - u_{3,1}) & -(u_{2,3} - u_{3,2}) & 0 \end{pmatrix}$$

À tout tenseur antisymétrique on peut adjoindre un vecteur ayant pour composantes les composantes strictes du tenseur.

$$\mathbf{rot\,u} = \begin{pmatrix} u_{3,2} - u_{2,3} \\ u_{1,3} - u_{3,1} \\ u_{2,1} - u_{1,2} \end{pmatrix}$$

est appelé *vecteur rotationnel.*

Exemple 21.14.1. *Dans le système de coordonnées rectangulaires* (x, y, z) *de l'espace euclidien* E_3 *:*

$$\mathbf{rot\,u} = \begin{pmatrix} \partial_y u_z - \partial_z u_y \\ \partial_z u_x - \partial_x u_z \\ \partial_x u_y - \partial_y u_x \end{pmatrix}$$

21.14.5 Laplacien d'un champ de scalaires

Soit ϕ une fonction scalaire des coordonnées curvilignes. On appelle *laplacien* de ϕ le scalaire :

$$\triangle\phi = \operatorname{div}\mathbf{grad}\,\phi$$

La divergence étant définie avec les composantes contravariantes du vecteur, nous avons :

$$\begin{aligned} \triangle\phi &= \nabla_i\left(g^{ij}\phi_{,j}\right) \\ &= g^{ij}\nabla_i\left(\phi_{,j}\right) \end{aligned}$$

Avec la définition 21.8.2 p. 235 :

$$\triangle\phi = g^{ij}\left(\partial_{ij}\phi - \Gamma^i{}_{kj}\,\phi_{,k}\right)$$

Avec la relation (147) p. 243 nous avons aussi :

$$\triangle\phi = \nabla_i\left(g^{ij}\phi_{,j}\right)$$

$$\triangle\phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_i\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\phi_{,j}\right)$$

Pour un système de coordonnées rectangulaire, $g = 1$ et $g^{ij} = \delta^{ij}$:

$$\triangle\phi = \sum_i \partial_{ii}\phi$$

21.15 Dérivée covariante seconde d'un vecteur

21.15.1 Vecteur en composantes contravariantes

Soit $\mathbf{v}$ un vecteur de composantes contravariantes v^i, d'après la définition 21.8.1 p. 234 sa dérivée covariante est un tenseur mixte de composantes :

$$\forall i, j \quad \nabla_j v^i \triangleq v^i{}_{,j} + v^k \, \Gamma^i{}_{kj}$$

La définition 21.12.1 p. 241 de la dérivation covariante d'un tenseur mixte,

$$\forall i, k, l \quad \nabla_l t^i_k = \partial_l t^i_k - t^i_h \, \Gamma^h{}_{kl} + t^h_k \, \Gamma^i{}_{hl}$$

nous donne :

$$\begin{aligned}\nabla_l \left(\nabla_k v^i\right) &= \partial_l \nabla_k v^i - \nabla_h v^i \, \Gamma^h{}_{kl} + \nabla_k v^h \, \Gamma^i{}_{hl} \\ &= \partial_l \left(v^i{}_{,k} + v^j \Gamma^i{}_{jk}\right) - \left(\partial_h v^i + v^j \Gamma^i{}_{jh}\right) \Gamma^h{}_{kl} + \left(\partial_k v^h + v^j \Gamma^h{}_{jk}\right) \Gamma^i{}_{hl} \\ &= \partial_{lk} v^i + v^j \partial_l \Gamma^i{}_{jk} + \Gamma^i{}_{jk} \, \partial_l v^j - \Gamma^h{}_{kl} \, \partial_h v^i - v^j \, \Gamma^i{}_{jh} \, \Gamma^h{}_{kl} + \Gamma^i{}_{hl} \, \partial_k v^h + v^j \, \Gamma^h{}_{jk} \, \Gamma^i{}_{hl}\end{aligned} \tag{149}$$

21.15.2 Vecteur en composantes covariantes

Soit vecteur $\mathbf{v}$ de composantes covariantes v_i, d'après la définition 21.8.2 p. 235, sa dérivée covariante est un tenseur deux fois covariant de composantes :

$$\forall i, k \quad \nabla_k v_i \triangleq \partial_k v_i - v_j \Gamma^i{}_{jk}$$

La définition 21.12.1 p. 241 de la dérivation covariante d'un tenseur deux fois covariant,

$$\forall i, k, m \quad \nabla_m t_{ik} = \partial_m t_{ik} - t_{lk} \, \Gamma^l{}_{im} - t_{il} \, \Gamma^l{}_{km}$$

nous donne :

$$\begin{aligned}\nabla_m \left(\nabla_k v_i\right) &= \partial_m \nabla_k v_i - \nabla_l v_i \, \Gamma^l{}_{km} - \nabla_k v_l \, \Gamma^l{}_{im} \\ &= \partial_m \left(\partial_k v_i - v_j \Gamma^i{}_{jk}\right) - \left(\partial_l v_i - v_j \Gamma^j{}_{il}\right) \Gamma^l{}_{km} - \left(\partial_k v_l - v_j \Gamma^j{}_{lk}\right) \Gamma^l{}_{im} \\ &= \partial_{mk} v_i - v_j \partial_m \Gamma^i{}_{jk} - \Gamma^i{}_{jk} \, \partial_m v_j - \Gamma^l{}_{km} \, \partial_l v_i + v_j \, \Gamma^j{}_{il} \, \Gamma^l{}_{km} - \Gamma^l{}_{im} \, \partial_k v_l + v_j \, \Gamma^j{}_{lk} \, \Gamma^l{}_{im}\end{aligned}$$

21.16 Règles de dérivation des tenseurs

21.16.1 Dérivée covariante

Dérivée covariante,

de la somme	:	$\nabla_k \left(\mathbf{T} + \mathbf{S}\right) = \nabla_k \mathbf{T} + \nabla_k \mathbf{S}$
de la multiplication tensorielle	:	$\nabla_k \left[\mathbf{TS}\right] = \left[\nabla_k \mathbf{TS}\right] + \left[\mathbf{T} \nabla_k \mathbf{S}\right]$
de la multiplication tensorielle contractée	:	$\nabla_k \left(\mathbf{TS}\right) = \nabla_k \mathbf{TS} + \mathbf{T} \nabla_k \mathbf{S}$

21.16.2 Différentielle absolue

Différentielle absolue,

$$\begin{aligned} \textit{de la somme} &: \quad D(\mathbf{T}+\mathbf{S}) = D\mathbf{T} + D\mathbf{S} \\ \textit{de la multiplication tensorielle} &: \quad D[\mathbf{TS}] = [D\mathbf{T}\,\mathbf{S}] + [\mathbf{T}\,D\mathbf{S}] \\ \textit{de la multiplication contractée} &: \quad D(\mathbf{TS}) = D\mathbf{T}\,\mathbf{S} + \mathbf{T}\,D\mathbf{S} \end{aligned}$$

Exemple 21.16.1. *Dérivée covariante de la somme de deux tenseurs :*

$$\begin{aligned} \forall i,k \quad \nabla_k t^i + \nabla_k s^i &= \partial_k t^i + t^j \Gamma^i{}_{jk} + \partial_k s^i + s^j \Gamma^i{}_{jk} \\ &= \partial_k \left(t^i + s^i\right) + \left(t^j + s^j\right) \Gamma^i{}_{jk} \\ &= \nabla_k \left(t^i + s^i\right) \end{aligned}$$

Exemple 21.16.2. *Dérivée covariante de la multiplication tensorielle de deux tenseurs. Soient t^i_j et s^i_j les composantes de deux tenseurs mixtes d'ordre deux, de produit tensoriel $u^{pq}_{rs} = t^p_r s^q_s$:*

$$\begin{aligned} \forall k,p,q,r,s \quad u^{pq}_{rs\,;\,k} &= u^{pq}_{rs,k} + \Gamma^p{}_{tk} u^{tq}_{rs} + \Gamma^q{}_{tk} u^{pt}_{rs} - \Gamma^t{}_{rk} u^{pq}_{ts} - \Gamma^t{}_{sk} u^{pq}_{rt} \\ &= \left(t^p_{r,k} s^q_s + t^p_r s^q_{s,k}\right) + \Gamma^p{}_{tk} u^{tq}_{rs} + \Gamma^q{}_{tk} u^{pt}_{rs} - \Gamma^t{}_{rk} u^{pq}_{ts} - \Gamma^t{}_{sk} u^{pq}_{rt} \\ &= \left(t^p_{r,k} + \Gamma^p{}_{tk} t^t_r - \Gamma^t{}_{rk} t^p_t\right) s^q_s + t^p_r \left(s^q_{s,k} + \Gamma^q{}_{tk} s^t_s - \Gamma^t{}_{sk} s^q_t\right) \\ &= t^p_{r\,;\,k} s^q_s + t^p_r s^q_{s\,;\,k} \end{aligned}$$

Exemple 21.16.3. *La contraction des indices et la dérivée covariante commutent :*

$$\begin{aligned} \forall i,j,l \quad r^{ij}_{k\,;\,l}\,\delta^k_j &= \left(r^{ij}_{k,l} + \Gamma^i{}_{tl} r^{tj}_k + \Gamma^j{}_{tl} r^{it}_k - \Gamma^t{}_{kl} r^{ij}_t\right) \delta^k_j \\ &= r^{ij}_{j,l} + \Gamma^i{}_{tl} r^{tj}_j + \Gamma^j{}_{tl} r^{it}_j - \Gamma^t{}_{jl} r^{ij}_t \\ &= r^{ij}_{j,l} + \Gamma^i{}_{tl} r^{tj}_j \\ &= r^{ij}_{j\,;\,l} \end{aligned}$$

Nous en déduisons la loi de dérivation covariante de la multiplication contractée, la contraction étant effectuée à la fin.

Exemple 21.16.4. *Dérivée absolue de la multiplication tensorielle. Soit une courbe d'équation paramétrique $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda)$, et soient $T[\mathbf{x}(\lambda)]$ et $S[\mathbf{x}(\lambda)]$ deux tenseurs définis* *sur cette courbe :*

$$\begin{aligned}
\frac{D}{d\lambda}\left[\mathbf{TS}\right] &= \nabla_k \left[\mathbf{TS}\right] \frac{d\mathbf{x}^k}{d\lambda} \\
&= \left\{\left[\nabla_k \mathbf{TS}\right] + \left[\mathbf{T}\nabla_k \mathbf{S}\right]\right\} \frac{d\mathbf{x}^k}{d\lambda} \\
&= \left[\nabla_k \mathbf{T}\frac{d\mathbf{x}^k}{d\lambda}\,\mathbf{S}\right] + \left[\mathbf{T}\nabla_k \mathbf{S}\,\frac{d\mathbf{x}^k}{d\lambda}\right] \\
&= \left[\frac{D\mathbf{T}}{d\lambda}\,\mathbf{S}\right] + \left[\mathbf{T}\,\frac{D\mathbf{S}}{d\lambda}\right]
\end{aligned}$$

22
Gravitation non relativiste

22.1 Force, champ, potentiel

Dans la théorie newtonienne de la gravitation, le modèle de Hooke de force de gravitation en inverse du carré de la distance s'exerçant entre deux corps de masse M et m s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{M\to m} &= -\frac{\mathrm{G}Mm}{\|\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_M\|^3}\,(\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_M)\\ &= -\frac{\mathrm{G}Mm}{r^2}\,\mathbf{e}_r\end{aligned}$$

où r est la distance entre les deux masses, $r\mathbf{e}_r$ est le rayon vecteur de M vers m, et où la constante de proportionnalité G est appelée *constante d'attraction gravitationnelle*. Le signe négatif indique que la force de gravitation est attractive.

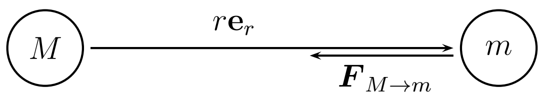


Fig. 22.1 – Signe de la force de gravitation

À partir de la force exercée en un point de l'espace (de masse m), on définit un champ de force exercé dans tout l'espace (donc indépendant de m).

Définition 22.1.1. *Modèle de champ de force*
Le modèle du champ de gravitation créé par la masse M à une distance quelconque r a pour expression :

$$\mathbf{g}_M \triangleq -\frac{\mathrm{G}M}{r^2}\,\mathbf{e}_r \tag{150}$$

où le rayon vecteur $r\mathbf{e}_r$ à pour origine M, et le signe négatif indique que le champ est dirigé vers M.

D'où la relation entre force gravitationnelle et champ de force gravitationnel :

$$\mathbf{F}_{M\to m} = m\,\mathbf{g}_M \tag{151}$$

Définition 22.1.2. *Potentiel scalaire d'un champ vectoriel*
La fonction scalaire f est dite potentielle du champ vectoriel $\boldsymbol{A}$ ssi :

$$\boldsymbol{A} \triangleq -\,\mathbf{grad}\,f$$

Réciproquement, nous dirons que le champ vectoriel $\boldsymbol{A}$ dérive du champ de scalaires f.

Exemple 22.1.1. *En coordonnées rectangulaires, cylindriques et sphériques, le gradient du vecteur $\boldsymbol{A}$ s'écrit respectivement :*

$$x_A\boldsymbol{i} + y_A\boldsymbol{j} + z_A\boldsymbol{k} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

$$\rho_A\boldsymbol{e}_\rho + \theta_A\boldsymbol{e}_\theta + z_A\boldsymbol{e}_z = -\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\,\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\boldsymbol{e}_z\right)$$

$$r_A\boldsymbol{e}_r + \theta_A\boldsymbol{e}_\theta + \phi_A\boldsymbol{e}_\phi = -\left(\frac{\partial f}{\partial r}\,\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\boldsymbol{e}_\phi\right)$$

En partant de la définition précédente :

Définition 22.1.3. *Potentiel du champ gravitationnel*
ϕ est le modèle de potentiel scalaire du champ gravitationnel $\mathbf{g}$ ssi

$$\mathbf{g} \triangleq -\,\mathbf{grad}\,\phi$$

Réciproquement, nous dirons que le champ $\mathbf{g}$ dérive du potentiel de champ ϕ.

Un champ est *conservatif* s'il dérive d'un potentiel. Le champ de gravitation est conservatif, il dérive du potentiel de champ ϕ appelé *potentiel newtonien*. En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) :

$$\mathrm{g}\boldsymbol{e}_\mathrm{r} = -\frac{\partial \phi}{\partial r}\,\boldsymbol{e}_r$$

$$\mathrm{g} = -\frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\int_A^B \mathrm{g}\,\mathrm{dr} = -\left(\phi_B - \phi_A\right)$$

La définition 22.1.1 p. 249 donne l'expression du modèle du champ gravitationnel créé par une masse M, on en déduit le modèle de potentiel du champ gravitationnel :

$$-\left(\phi_B - \phi_A\right) = -\int_A^B \frac{\mathrm{G}M}{r^2}\,dr$$

$$\phi_A - \phi_B = \left[\frac{\mathrm{G}M}{r}\right]_A^B$$

$$\boxed{\phi = -\frac{\mathrm{G}M}{r}} \tag{152}$$

Définition 22.1.4. *Potentiel de la force gravitationnelle*
E_p est le modèle de potentiel scalaire de la force gravitationnelle $\mathbf{F}$ ssi

$$\mathbf{F} \triangleq -\,\mathbf{grad}\, E_p$$

Réciproquement, la force de gravitation $\mathbf{F}$ dérive du potentiel de force E_p, appelé énergie potentielle de gravitation.

En partant de la définition précédente, en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= -\,\mathbf{grad}\, E_p \\
F\boldsymbol{e}_r &= -\frac{\partial E_p}{\partial r}\,\boldsymbol{e}_r \\
F &= -\frac{\partial E_p}{\partial r} \\
E_p &= -\int F\,dr \\
&= -\int -\frac{\mathrm{G}Mm}{r^2}\,dr
\end{aligned}$$

$$E_p = -\frac{\mathrm{G}Mm}{r}$$

Le potentiel de force et le potentiel de champ sont liés par la même relation ((151) p. 250) qui lie force et champ :

$$E_p = m\phi$$

22.2 Champ de gravitation dû à une sphère homogène

Soit une masse uniformément répartie sur la surface d'une sphère creuse de rayon a. Calculons l'intensité du champ de gravitation en un point P extérieur à la sphère. Découpons la sphère en bandes circulaires de rayon $a\sin(\theta)$ et de largeur $ad\theta$ où θ est la latitude.

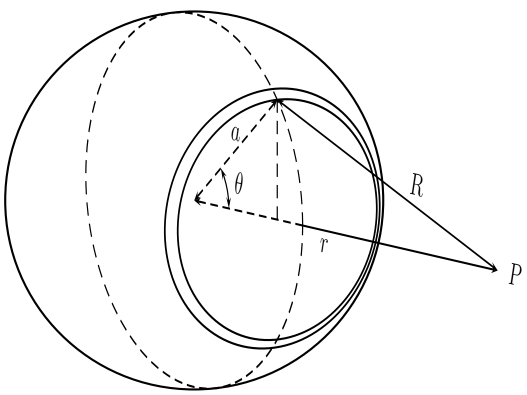


Fig. 22.2 – Champ de gravitation en P

L'aire infinitésimale d'une bande vaut

$$\begin{aligned} ds &= 2\pi a \sin(\theta) \times a d\theta \\ &= 2\pi a^2 \sin(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Soit m la masse de la sphère et ρ sa densité. La masse infinitésimale d'une bande vaut

$$\begin{aligned} dm &= \rho ds \\ &= \frac{m}{4\pi a^2} \times 2\pi a^2 \sin(\theta) d\theta \\ &= \tfrac{1}{2} m \sin(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Soit R la distance du point P à la bande, le champ de gravitation infinitésimal produit par cette bande en un point P s'écrit :

$$d\mathbf{g}_m = -\frac{\mathrm{G}m \sin(\theta) d\theta}{2R^2}\,\mathbf{e}_r$$

Plutôt que d'effectuer la difficile intégration du champ vectoriel de gravitation, nous allons intégrer le champ scalaire du potentiel grâce à la relation (152) p. 250, puis nous reviendrons au champ de gravitation :

$$\begin{aligned} dV &= -\frac{\mathrm{G}\, dm}{R} \\ &= -\frac{\mathrm{G}m \sin(\theta) d\theta}{2R} \end{aligned}$$

Soit r la distance du point P au centre de la sphère. Différentions la loi des cosinus :

$$\begin{aligned} R^2 &= a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta) \\ 2RdR &= 2ar \sin(\theta) d\theta \\ \frac{RdR}{ar} &= \sin(\theta) d\theta \end{aligned}$$

si bien que

$$dV = -\frac{\mathrm{G}m dR}{2ar}$$

Intégrons sur la surface totale de la sphère. Quand P est en dehors de la sphère $r > a$, R varie de $r + a$ à $r - a$:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\mathrm{G}m}{2ar} \int_{r-a}^{r+a} dR \\ &= -\frac{\mathrm{G}m}{2ar}\, 2a \\ &= -\frac{\mathrm{G}m}{r} \end{aligned}$$

Quand P est dans la sphère $r < a$, R varie de $a + r$ à $a - r$:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\mathrm{G}m}{2ar} \int_{a+r}^{a-r} dR \\ &= -\frac{\mathrm{G}m}{2ar}\, 2r \\ &= -\frac{\mathrm{G}m}{a} \\ &= C^{ste} \end{aligned}$$

Pour le champ de gravitation à l'extérieur de la sphère nous obtenons :

$$\mathbf{g} = -\frac{\mathrm{G}m}{r^2}\,\mathbf{e}_r, \qquad r > a$$

Le champ de gravitation en un point extérieur à la sphère est identique au champ de gravitation que l'on aurait si la masse de la sphère était toute entière au centre de la sphère. À l'intérieur de la sphère :

$$\mathbf{g} = \mathbf{0}, \qquad r < a$$

En tout point intérieur à une sphère le champ de gravitation est nul.

22.3 Champ de gravitation dû à une boule homogène

On suppose que la boule est un ensemble de sphères concentriques homogènes. On applique le résultat précédent pour chaque sphère. Le champ de gravitation en un point extérieur à la boule est identique au champ de gravitation que l'on aurait si la masse de la boule était toute entière au centre de la boule.

En un point P intérieur à la boule, toutes les sphères de rayon supérieur à r ne contribuent pas au champ en P. Soit M la masse de la boule de rayon r, le champ de gravitation s'écrit :

$$\mathbf{g} = -\frac{\mathrm{G}M}{r^2}\,\mathbf{e}_r$$

La masse M a pour expression :

$$\begin{aligned} M &= \frac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3} \times \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{mr^3}{a^3} \end{aligned}$$

si bien que :

$$\mathbf{g} = -\frac{\mathrm{G}mr}{a^3}\,\mathbf{e}_r$$

Au centre d'une boule le champ de gravitation est nul (par symétrie sphérique), puis il augmente linéairement jusqu'à la surface de la boule, puis décroit en fonction du carré de la distance au centre de la boule.

22.4 Équations de Poisson et de Laplace

Si dans un volume donné un champ de vecteurs (scalaires, vecteurs ou tenseurs) est de divergence nulle, ce qui signifie qu'il ne diverge pas, ni ne converge, autrement dit il n'y a ni source ni puit dans ce volume, alors ce champ de vecteurs est à flux conservatif à travers la surface fermée de ce volume. Tout ce qui entre par la surface en ressort, et tout ce qui sort entre. Il y a conservation du champ dans le volume en question. Réciproquement, si un champ de vecteur est à flux conservatif alors sa divergence est nulle.

22.4.1 Théorème de la divergence

Théorème 22.4.1. *Théorème de la divergence*
Soit $\mathbf{u}$ *un champ de vecteurs quelconque. Pour tout volume* V *de surface* S *et de normale sortante* $\mathbf{n}$ *:*

$$\boxed{\oiint_S \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iiint_V \operatorname{div}\,\mathbf{u}\,dv}$$

Démonstration. Soit un système de coordonnées rectangulaires (x^i), de base naturelle $(\mathbf{e}_i)$. Soit S une surface fermée telle que toute droite parallèle aux axes de coordonnées coupe cette surface en au plus deux points (par exemple un balon de baudruche suffisamment gonflé) :

$$\begin{aligned}\oiint_S \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,ds &= \oiint_S (u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{n}\,ds\\ &= \oiint_S u^1\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{n}\,ds + \oiint_S u^2\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{n}\,ds + \oiint_S u^3\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{n}\,ds\end{aligned}$$

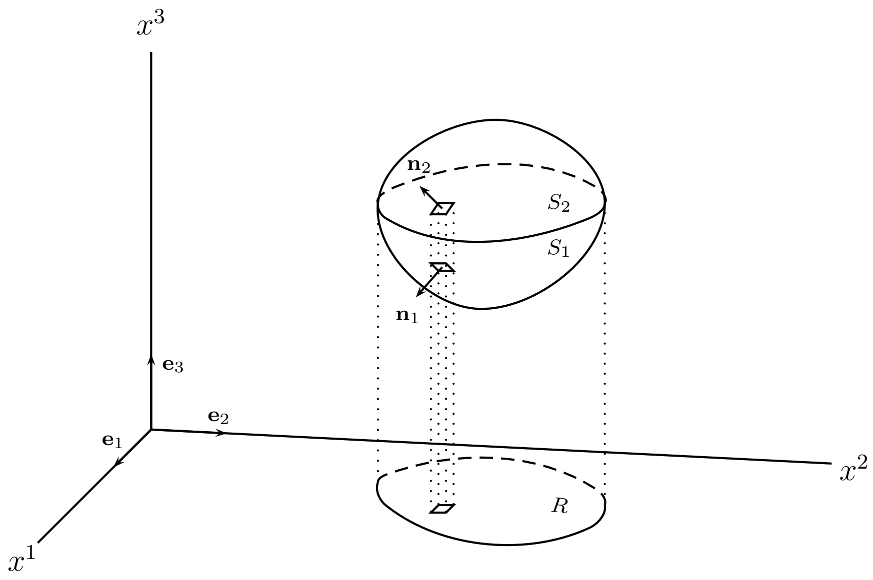


Fig. 22.3 – Volume de surface S

Calculons le dernier terme du membre de droite. Imaginons un plan (x^1, x^2) horizontal coupant la surface fermée S en deux, de sorte que la ligne d'intersection soit la plus longue possible. Nous intégrons maintenant sur les deux surfaces S_1 en bas et S_2 en haut, non fermées, de normales sortantes respectives $\mathbf{n}_1$ vers le bas et $\mathbf{n}_2$ vers le haut

$$\oiint_S u^3\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_{S_1} u^3\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{n}_1\,ds_1 + \iint_{S_2} u^3\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{n}_2\,ds_2$$

avec :

$$\begin{cases}\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{n}_1\,ds_1 = -dx^1dx^2\\ \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{n}_2\,ds_2 = dx^1dx^2\end{cases}$$

Les surfaces S_1 et S_2 ont pour équation respective :

$$\begin{cases}S_1 \ : \ x^3 = x_1^3(x^1, x^2)\\ S_2 \ : \ x^3 = x_2^3(x^1, x^3)\end{cases}$$

Soit R le domaine d'intégration en x^1, x^2 :

$$\begin{aligned}\oiint_S u^3\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{n}\,ds &= \iint_R u^3(x^1,x^2,x^3_2)\,dx^1dx^2 - \iint_R u^3(x^1,x^2,x^3_1)\,dx^1dx^2\\ &= \iint_R [u^3(x^1,x^2,x^3_2) - u^3(x^1,x^2,x^3_1)]\,dx^1dx^2\\ &= \iint_R \left(\int_{x^3_1}^{x^3_2}\frac{\partial u^3}{\partial x^3}\,dx^3\right)dx^1dx^2\\ &= \iiint_V \frac{\partial u^3}{\partial x^3}\,dv\end{aligned}$$

Nous obtenons un résultat similaire pour les coordonnées x^1 et x^2, si bien que :

$$\begin{aligned}\oiint_S \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,ds &= \iiint_V \frac{\partial u^1}{\partial x^1}\,dv + \iiint_V \frac{\partial u^2}{\partial x^2}\,dv + \iiint_V \frac{\partial u^3}{\partial x^3}\,dv\\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^1}+\frac{\partial u^2}{\partial x^2}+\frac{\partial u^3}{\partial x^3}\right)dv\\ &= \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,dv\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la définition (148) p. 243 de l'opérateur différentiel divergence en coordonnées rectilignes. Le théorème peut s'étendre aux surfaces qui ne satisfont pas la condition que des droites parallèles aux axes de coordonnées rectangulaires les coupent en au plus deux points. Pour établir cette généralisation, subdiviser le domaine S en sous-domaines dont les surfaces satisfont la condition. □

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$ et $\operatorname{div}\mathbf{u}$ sont des scalaires et l'intégrale de surface et celle de volume ne dépendent pas du système de coordonnées, par conséquent ce théorème est une égalité entre deux scalaires, donc une relation tensorielle vraie dans tout système de coordonnées :

$$\oiint_S u^i n_i\,ds = \iiint_V \partial_i u^i\,dv$$

Avec (76) p. 162, remplaçons dv par $\sqrt{|g|}\,d\Omega$ et ds par $\sqrt{|g|}\,d\sigma$:

$$\oiint_S \sqrt{|g|}\,u^i n_i\,d\sigma = \iiint_V \sqrt{|g|}\,\partial_i u^i\,d\Omega \tag{153}$$

22.4.2 Théorème de Gauss

Théorème 22.4.2. *Théorème de Gauss*

Soit S une surface fermée quelconque, de normale sortante $\mathbf{n}$. Soit $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ un champ de vecteurs d'origine O :

Si O est extérieur à S, $\displaystyle\oiint_S \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}\cdot\mathbf{n}\,ds = 0$

Si O est intérieur à S, $\displaystyle\oiint_S \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}\cdot\mathbf{n}\,ds = 4\pi$

Démonstration. À partir du théorème de la divergence 22.4.1 p. 254 avec $\mathbf{u} = \mathbf{e}_r/r^2$:

$$\oiint_S \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iiint_V \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}\right)dv$$

— Supposons O extérieur à S. Dans ce cas r ne peut pas être nul dans le volume d'intégration de la divergence ($r \neq 0$ dans V) :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}\right) &= \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) \\
&= \operatorname{div}\left(\frac{x^1}{r^3}\,\mathbf{e}_1 + \frac{x^2}{r^3}\,\mathbf{e}_2 + \frac{x^3}{r^3}\,\mathbf{e}_3\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{x^1}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{x^2}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{x^3}{r^3}\right)
\end{aligned}$$

Pour le premier membre :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{x^1}{r^3}\right) &= \frac{\partial}{\partial x^1}\left\{\frac{x^1}{[(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2]^{3/2}}\right\} \\
&= \left(r^3 - x^1 \times 2x^1 \times \frac{3}{2}\,r\right)/r^6 \\
&= \left(r^3 - 3r(x^1)^2\right)/r^6
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}\right) &= \left[3r^3 - 3\left(x^2+y^2+z^2\right)r\right]/r^6 \\
&= 0
\end{aligned}$$

— Supposons maintenant O intérieur à S. Entourons O d'une petite sphère s de rayon a et de volume v. Soit $\mathscr{V}$ le volume intérieur à S et extérieur à s, et soient $\mathbf{n}_S$ et $\mathbf{n}_s$ les normales sortantes respectives des surfaces S et s :

$$\begin{aligned}
\oiint_S \frac{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}_S}{r^2}\,ds - \oiint_s \frac{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}_s}{r^2}\,ds &= \iiint_V \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}\right)dv - \iiint_v \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}\right)dv \\
&= \iiint_{\mathscr{V}} \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}\right)\mathrm{d}v \\
&= 0
\end{aligned}$$

car O est extérieur à $\mathscr{V}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\oiint_S \frac{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}_S}{r^2}\,ds &= \oiint_s \frac{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}_s}{r^2}\,ds \\
&= \frac{1}{a^2}\oiint_s ds \\
&= \frac{4\pi a^2}{a^2} \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

□

22.4.3 Loi de Gauss pour la gravitation

THÉORÈME 22.4.3. *Loi de Gauss, forme intégrale*

Le flux d'un champ de gravitation à travers une surface fermée est proportionnel à la somme des masses intérieures à cette surface :

$$\oiint_S \mathbf{g}_{M_{int}} \cdot \mathbf{n}\,ds = -4\pi \mathrm{G} M_{int}$$

Le signe négatif indique que le flux est entrant.

Démonstration. Deux cas :

— Pour le « cas intérieur », remplaçons le champ de gravitation par son modèle (150) p. 249, et intégrons sur une surface fermée autour de la masse :

$$\begin{aligned}\oiint_S \mathbf{g}_{M_{int}} \cdot \mathbf{n}\, ds &= \oiint_S -\frac{\mathrm{G}M_{int}}{r^2}\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}\, ds \\ &= -\mathrm{G}M_{int} \oiint_S \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \cdot \mathbf{n}\, ds\end{aligned}$$

Appliquons le théorème de Gauss :

$$\oiint_S \mathbf{g}_{M_{int}} \cdot \mathbf{n}\, ds = -4\pi \mathrm{G} M_{int}$$

La masse intérieure à la surface est la source du champ de gravitation, dirigé vers la masse (signe négatif car $\mathbf{g}_{M_{int}}$ est entrant et la normale $\mathbf{n}$ est sortante).

□

— Pour le « cas extérieur » nous pouvons poser $M_{int} = 0$, ou bien appliquer le théorème de Gauss sur une surface fermée ne contenant pas de masse :

$$\oiint_S \mathbf{g}_M \cdot \mathbf{n}\, ds = 0$$

Le flux du champ de vecteurs $\mathbf{g}_M$ issu de M est nul à travers une surface ne contenant pas M. Il n'y a ni source ni puit dans le volume défini par cette surface, et le flux entrant et égal au flux sortant.

Théorème 22.4.4. *Loi de Gauss, forme différentielle*

$$\mathrm{div}\ \mathbf{g} = -4\pi \mathrm{G} \rho_{int}$$

Démonstration. À partir du théorème de la divergence 22.4.1 p. 254 et de la forme intégrale du théorème de Gauss appliqué au champ de gravitation :

$$\begin{aligned}\iiint_V \mathrm{div}\ \mathbf{g}\, dv &= \oiint_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}\, ds \\ &= -4\pi \mathrm{G} M_{int} \\ &= -4\pi \mathrm{G} \iiint_V \rho_{int}\, dv \\ \mathrm{div}\ \mathbf{g} &= -4\pi \mathrm{G} \rho_{int}\end{aligned}$$

□

Théorème 22.4.5. *Équation de Poisson*

Soit ϕ le potentiel d'un champ de gravitation. À l'intérieur d'une distribution de masse de densité volumique ρ (cas « intérieur ») :

$$\triangle \phi = 4\pi \rho \mathrm{G} \tag{154}$$

Démonstration. À partir de la loi de Gauss sous forme différentielle :

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\ \mathbf{g} &= -4\pi\rho \mathrm{G} \\ -\mathrm{div}\ \mathbf{grad}\, \phi &= -4\pi\rho \mathrm{G} \\ \triangle \phi &= 4\pi\rho \mathrm{G}\end{aligned}$$

□

Théorème 22.4.6. *Équation de Laplace*
En posant $\rho = 0$ dans l'équation de Poisson, nous retrouvons le cas « extérieur » :

$$\triangle\phi = 0 \tag{155}$$

22.5 Principe d'équivalence

Un observateur en chute libre dans un champ de gravitation est dans un référentiel inertiel, il ne ressent pas le champ de gravitation. La réciproque de ce constat est le Principe d'équivalence :

> Un champ de gravitation (ressenti) est localement équivalent à un référentiel non inertiel.

Un champ de gravitation homogène et constant est localement équivalent à un référentiel uniformément accéléré, ou à un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe loin du centre du référentiel (en plaçant l'observateur au centre du référentiel). Cette équivalence est locale car

— dans un champ de gravitation les trajectoires de deux masses se rejoignent alors qu'elles sont parallèles dans un référentiel uniformément accéléré, et divergentes dans un référentiel en rotation uniforme.

— un champ de gravitation n'est homogène que localement, il tend vers zéro à l'infini alors que le champ équivalent est constant dans un référentiel uniformément accéléré, et croit indéfiniment dans un référentiel en rotation uniforme. L'inhomogénéité des champs de gravitation est à l'origine des forces de marée, qui n'existent pas dans un référentiel uniformément accéléré ou en rotation uniforme, les forces étant fictives.

De plus ce principe n'est valable que lorsque les masses passives sont petites par rapport à la masse active qui crée le champ de gravitation. Dans le champ de gravitation terrestre, le Soleil n'a pas la même trajectoire que la lune.

Un champ de gravitation homogène et non constant (variable) est localement équivalent à un référentiel accéléré non uniformément ou à un référentiel en rotation non uniforme.

23

Géométrie des variétés riemanniennes

Nous avons vu, définition 11.2.2 p. 90, qu'un espace vectoriel est pré-euclidien s'il admet une base orthonormée ou pseudo-orthonormée globale, autrement dit si le tenseur fondamental G peut être ramené par un changement de coordonnées à la forme :

$$\forall i,j \quad g_{ij} = \pm\delta_{ij}$$

Cela n'est pas toujours possible car dans un espace à n dimensions, un changement de variables fournit n fonctions $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$ alors qu'il en faudrait $n(n+1)/2$ pour changer chaque élément d'une métrique riemannienne quelconque. L'espace euclidien est donc un cas particulier d'espace riemannien.

Pour une dimension donnée il existe une infinité d'espaces riemanniens, quelques espace pré-euclidiens, et un seul espace euclidien. Si nous ne pouvons pas toujours ramener globalement un espace riemannien à un espace pré-euclidien par changement de coordonnées, il est toujours possible de le faire localement en un point, que nous noterons M_0. Cela revient à considérer l'espace pré-euclidien tangent à l'espace riemannien en M_0. Les métriques de deux espaces tangents en un point sont par définition égales, et par conséquent la dimension de l'espace et celle de son espace tangent sont égales.

De plus, nous cherchons un espace tangent pré-euclidien dont les composantes du tenseur métrique $\bar{g}_{ij}$ sont des constantes (ne sont pas fonction des coordonnées)

$$\forall i,j,k \quad \partial_k \bar{g}_{ij} = 0$$

donc exprimées dans un système de coordonnées rectilignes.

23.1 Métrique euclidienne tangente en un point

23.1.1 Espace euclidien tangent

Soit (x^i) un système de coordonnées curvilignes d'un espace de Riemann $\mathcal{R}_n$ de métrique :

$$ds^2 = g_{ij}(x^i)\, dx^i dx^j$$

Pour douer cet espace de propriétés géométriques, nous l'identifions localement à un espace ponctuel euclidien de même signature.

Soit (y^i) un système de coordonnées curvilignes d'un espace ponctuel euclidien $\mathcal{E}_n$ de même signature que $\mathcal{R}_n$, et de métrique :

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}(y^i)\, dy^i dy^j$$

Par changement de variables dans $\mathcal{E}_n$, $y^i = y^i(x^j)$, utilisons les mêmes coordonnées (x^i) que celles de $\mathcal{R}_n$. La métrique de $\mathcal{E}_n$ s'écrit à présent :

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}(x^i)\, dx^i dx^j$$

Construisons l'espace euclidien tangent à $\mathcal{R}_n$ en un point $M_0(x_0^i)$ de $\mathcal{R}_n$. À ce point faisons correspondre le point $m_0(x_0^i)$ de $\mathcal{E}_n$, tel qu'en ces deux points les métriques soient égales :

$$\forall i, j \quad (\bar{g}_{ij})_{m_0} = (g_{ij})_{M_0} \tag{156}$$

Pour l'instant nous avons fixé la métrique de l'espace euclidien en un seul point, le point m_0. Prenons une métrique constante (dont les composantes ne sont pas des fonctions explicites ou implicites des coordonnées) pour l'espace $\mathcal{E}_n$ entier, qui soit en tout point égale à $(\bar{g}_{ij})_{m_0}$. C'est le plus simple et cela nous assure que l'espace que nous avons contruit est bien euclidien. Notons $(\bar{\mathbf{e}}_i)$ sa base :

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad \bar{g}_{ij} &= (\bar{g}_{ij})_{M_0} \\ \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j &= (g_{ij})_{M_0} \end{aligned} \tag{157}$$

23.1.2 Représentation du premier ordre

Nous avons la métrique constante $\bar{g}_{ij} = (g_{ij})_{M_0}$ de l'espace euclidien tangent au point M_0 de l'espace riemannien. Étudions la correspondance entre ces deux espaces au voisinage de ce point.

Supposons qu'à tout point $M(x^i)$ du voisinage de $M_0(x_0^i)$ dans $\mathcal{R}_n$, nous fassions correspondre un point m du voisinage de m_0 dans $\mathcal{E}_n$, tel que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m_0 m} &\triangleq \left[\left(x^i - x_0^i\right) + \Psi_2^i\left(x^r - x_0^r\right)\right] \bar{\mathbf{e}}_i \\ &\triangleq \left[dx^i + \Psi_2^i\left(dx^r\right)\right] \bar{\mathbf{e}}_i \end{aligned} \tag{158}$$

où les fonctions Ψ_2^i sont du deuxième ordre par rapport aux variables $(x^r - x_0^r)$, pour $x^r - x_0^r$ voisins de zéro. Cette correspondance définit *une représentation du premier ordre* pour le voisinage de M_0. Le point m est l'image de M dans cette représentation, et m_0 est l'image de M_0.

D'après cette relation, m a pour coordonnées x^i dans la base $(m_0, \bar{\mathbf{e}}_i)$. On vérifie ainsi que le système de coordonnées curvilignes (x^i) de $\mathcal{R}_n$ constitue aussi un système de coordonnées curvilignes de l'espace euclidien au voisinage de m_0. On vérifie également que la base naturelle de $\mathcal{E}_n$ est définie par les $(\bar{\mathbf{e}}_i)$:

$$\begin{aligned} \forall i \quad \frac{\partial \boldsymbol{m_0 m}}{\partial x^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\left(x^i - x_0^i\right) + \Psi_2^i\left(x^r - x_0^r\right)\right] \bar{\mathbf{e}}_i \\ \forall i \quad \left(\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial x^i}\right)_{m_0} &= \bar{\mathbf{e}}_i \end{aligned} \tag{159}$$

23.1.3 Caractère intrinsèque de la représentation du premier ordre

Effectuons le changement de coordonnées $(x^i) \to \left(x^{i'}\right)$. La représentation du premier ordre prend alors la forme suivante

$$\boldsymbol{m_0 m} = \left[\left(x^{i'} - x_0^{i'}\right) + \Theta_2^i\left(x^{r'} - x_0^{r'}\right)\right] \bar{\mathbf{e}}_i$$

où les fonctions Θ_2^i sont du deuxième ordre par rapport aux variables $x^{r'} - x_0^{r'}$, pour $x^{r'} - x_0^{r'}$ voisins de zéro. Sa forme étant indépendante du système de coordonnées utilisé, elle présente un caractère *intrinsèque*.

Pour que la métrique euclidienne tangente présente elle aussi un caractère intrinsèque, l'égalité (157) p. 260 doit être également vérifiée dans le nouveau système de coordonnées :

$$\forall k, l \quad \bar{g}_{k'l'} = (g_{k'l'})_{M_0}$$

D'après les relations (108) p. 204, par changement de coordonnées, le tenseur métrique de l'espace ponctuel euclidien tangent $\mathcal{E}_n$ se transforme en tout point selon la loi :

$$\forall i, j \quad \bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j} \bar{g}_{k'l'}$$

Par conséquent, il faut aussi que dans l'espace riemannien $\mathcal{R}_n$ nous ayons en tout point

$$\forall i, j \quad g_{ij} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j} g_{k'l'}$$

et c'est ce que nous *poserons*. En effet, dans ce cas d'après (157) p. 260

$$\begin{aligned} \forall i, j \quad \bar{g}_{ij} &= (g_{ij})_{M_0} \\ \partial_i x^{k'} \partial_j x^{l'} \, \bar{g}_{k'l'} &= \partial_i x^{k'} \partial_j x^{l'} \, (g_{k'l'})_{M_0} \\ \forall k, l \quad \bar{g}_{k'l'} &= (g_{k'l'})_{M_0} \end{aligned}$$

et l'égalité est conservée par changement de coordonnées. Nous pouvons alors, grâce au caractère instrinsèque de la représentation du premier ordre et de la métrique euclidienne tangente, étendre aux espaces riemanniens des notions géométriques d'origine euclidienne.

23.1.4 Propriétés déduites des métriques euclidiennes tangentes

Certaines propriétés de l'espace euclidien vont pouvoir être transposées dans les espaces de Riemann en utilisant la métrique euclidienne tangente en chaque point M de $\mathcal{R}_n$.

Soit (x^i) un système de coordonnées curvilignes d'un espace riemannien $\mathcal{R}_n$ de métrique :

$$ds^2 = g_{ij} \, dx^i dx^j$$

Soit M un point de $\mathcal{R}_n$ et soit $\mathcal{E}_n$ l'espace ponctuel euclidien tangent en M à $\mathcal{R}_n$, de même système de coordonnées curvilignes (x^i) et de métrique constante :

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 &= \bar{g}_{ij} \, dx^i dx^j \\ &= (g_{ij})_M \, dx^i dx^j \end{aligned}$$

DÉFINITION 23.1.1. *Tenseur de* $\mathcal{R}_n$
Nous définissons un tenseur au point M d'un espace riemannien par ses composantes relatives aux coordonnées (x^i), en définissant un tenseur au point m de l'espace euclidien tangent en M, par ses composantes dans le repère $(m, \bar{\mathbf{e}}_i)$.

Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs attachés au même point M d'un espace riemannien de tenseur métrique G, est donné par :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (g_{ij})_M \, v^i w^j$$

Distance dans $\mathcal{R}_n$

Le carré de la distance élémentaire entre deux points M_0 et M infiniment proches dans l'espace riemannien est égale au carré de la distance élémentaire euclidienne des deux points images m_0 et m :

$$\begin{aligned}\overline{m_0m}^2 &= \bar{g}_{ij}\, dx^i dx^j \\ &= (g_{ij})_{M_0}\, dx^i dx^j \\ &= \overline{M_0M}^2\end{aligned}$$

On déduit la longueur d'un arc de courbe en intégrant la distance élémentaire dans l'espace riemannien. La fonction indicatrice ε ((34) p. 77) rend le carré de la distance positif dans les espaces pseudo-riemanniens :

$$ds^2 = \varepsilon g_{ij}\, dx^i dx^j$$

De façon équivalente

$$\varepsilon ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j$$

Par intégration on en déduit la longueur d'un arc de courbe :

$$\Gamma = \int_a^b \sqrt{\varepsilon g_{ij}\, dx^i dx^j}$$

On retrouve (23) p. 65.

Exemple 23.1.1. *Soit la courbe paramétrée,*

$$\mathscr{C}(\lambda) \quad : \quad \begin{cases} x^1 = 1 \\ x^2 = \lambda \end{cases} \quad (1 \leqslant \lambda \leqslant 2)$$

dans un espace de métrique hyperbolique

$$g_{11} = g_{22} = {}^1/(x^2)^2 \quad : \quad g_{12} = g_{21} = 0$$

calculons sa longueur :

$$\begin{aligned}\varepsilon \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 &= \left(\frac{dx^i}{d\lambda}\right)^T G \left(\frac{dx^j}{d\lambda}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} {}^1/\lambda^2 & 0 \\ 0 & {}^1/\lambda^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

donc $\varepsilon = 1$.

$$\Gamma = \int_1^2 ds = \int_1^2 \frac{d\lambda}{\lambda} = \ln 2$$

Hypervolume dans $\mathcal{R}_n$

L'hypervolume élémentaire d'origine M est donné par la relation (111) p. 220 :

$$\begin{aligned}d\mathcal{V} &= \sqrt{|g|}\, dx^1 \dots dx^n \\ &= \sqrt{|\bar{g}|}\, dx^1 \dots dx^n\end{aligned}$$

où le déterminant g est fonction des coordonnées du point M. Par intégration on déduit l'hypervolume d'un domaine de dimension n :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \int \sqrt{|g|} \prod_{i=1}^{n} dx^i \\ &= \int \sqrt{|g|}\, d\Omega\end{aligned}$$

Utilisons les relations (76) p. 162 et (109) p. 205 :

$$\begin{aligned}\sqrt{|g|}\, d\Omega &= J\sqrt{|g'|}\,\frac{d\Omega'}{J} \\ &= \sqrt{|g'|}\, d\Omega' \qquad (160)\end{aligned}$$

L'élément d'hypervolume et par suite l'hypervolume sont donc invariants par changement de coordonnées, ce sont des scalaires. Une arrête de l'hypervolume pouvant être prise de longueur nulle, un hypervolume de dimension quelconque d'un domaine de l'espace est un scalaire.

23.1.5 Représentation du second ordre

Pour étendre aux espaces de Riemann les notions d'analyse tensorielle de la géométrie euclidienne, nous définissons la notion de champ de tenseurs sur un espace riemannien.

DÉFINITION 23.1.2. *Champ de tenseurs*
Attachons à chaque point M d'un espace riemannien $\mathcal{R}_n$ un tenseur T de la façon suivante : au point M faisons correspondre dans l'espace euclidien tangent un repère $(m, \mathbf{e}_i)$ compatible avec la métrique riemannienne en ce point. La donnée des composantes du tenseur dans ce repère en fonction des coordonnées (x^i) communes aux deux espaces dans le voisinage de M, constitue un champ de tenseurs dans $\mathcal{R}_n$.

EXEMPLE 23.1.2. *Les composantes g_{ij} du tenseur fondamental données en tout point M sont un exemple de composantes covariantes d'un champ de tenseur d'ordre deux.*

DÉFINITION 23.1.3. *Différentielle absolue*
Soient T_0 et T deux tenseurs de $\mathcal{R}_n$, attachés aux points infiniment voisins M_0 et M. Dans une représentation du premier ordre, leur différence est définie à des infiniment petits du premier ordre. La partie principale de cette différence est appelée différentielle absolue du tenseur T.

La notion de métrique euclidienne tangente ne nous permet pas de comparer entre eux des tenseurs attachés à deux points, même infiniment proches, de l'espace riemannien.

En effet, dans un espace riemannien $\mathcal{R}_n$, donnons-nous un champ de vecteurs $\mathbf{v}$ par leurs composantes contravariantes v^i. Soient deux vecteurs de ce champ, attachés en deux points infiniment proches M_0 et M. Leur différentielle absolue est la différence géométrique de leurs vecteurs images dans l'espace euclidien tangent $\mathcal{E}_n$. La définition 21.7.2 p. 233 nous donne ses composantes contravariantes dans le repère naturel en un point m_0 de $\mathcal{E}_n$:

$$\forall i \quad \left(Dv^i\right)_{m_0} = \left(dv^i\right)_{m_0} + \left(v^j\right)_{m_0} \left(\bar{\Gamma}^i{}_{kj}\right)_{m_0} du^k$$

Pour étendre la notion de différentielle absolue aux espaces de Riemann, et écrire

$$\forall i \quad \left(Dv^i\right)_{M_0} = \left(Dv^i\right)_{m_0}$$

il faudrait avoir

$$\forall i, j, k \quad \left(\Gamma^i{}_{kj}\right)_{M_0} = \left(\bar{\Gamma}^i{}_{kj}\right)_{m_0}$$

c'est-à-dire d'après (127) p. 225 :

$$\forall i, j, k \quad (\partial_k g_{ij})_{M_0} = (\partial_k \bar{g}_{ij})_{m_0} \tag{161}$$

Pour cela, remplaçons la représentation du premier ordre (158) p. 260 par une représentation du second ordre, c'est-à-dire l'espace euclidien tangent par un espace euclidien osculateur. La formule de Taylor s'écrit

$$f(x,y) = f(a,b) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{a,b}(x-a) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{a,b}(y-b) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{a,b}(x-a)^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{a,b}(x-b)^2$$
$$+ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{a,b}(x-a)(y-b) + R_3[(x-a),(y-b)]$$

où les fonctions R_3 sont du 3^e ordre par rapport aux variables $(x-a)$ et $(y-b)$. En prenant deux points infiniment proches :

$$f(x+dx, y+dy) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + R_3(dx,dy)$$

En particulier pour le vecteur position, en utilisant la relation (119) p. 224 :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{om}(x^i + dx^i) - \boldsymbol{om_0}(x^i) &= \partial_i \boldsymbol{m} dx^i + \tfrac{1}{2}\partial_{jk}\boldsymbol{m} dx^j dx^k + \Phi_3^i(dx^r)\bar{\mathbf{e}}_i \\ &= dx^i \bar{\mathbf{e}}_i + \tfrac{1}{2}\bar{\Gamma}^i{}_{jk} dx^j dx^k \bar{\mathbf{e}}_i + \Phi_3^i(dx^r)\bar{\mathbf{e}}_i \\ &= [dx^i + \tfrac{1}{2}\bar{\Gamma}^i{}_{jk} dx^j dx^k + \Phi_3^i(dx^r)]\bar{\mathbf{e}}_i\end{aligned}$$

où les fonctions Φ_3^i sont du 3^e ordre par rapport aux variables dx^r au voisinage du point m_0. Posons :

$$\boldsymbol{m_0 m} \triangleq \left[dx^i + \tfrac{1}{2}\Gamma^i{}_{kj} dx^j dx^k + \Phi_3^i\left(dx^r\right)\right]\bar{\mathbf{e}}_i \tag{162}$$

où les symboles de Christoffel sont évalués dans l'espace riemannien. Cette représentation étant déjà du premier ordre, les relations (159) p. 260 restent valables :

$$\forall i \quad \left(\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial x^i}\right)_{m_0} = \bar{\mathbf{e}}_i$$

— d'une part, en dérivant deux fois (162) :

$$\forall j, k \quad \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{m}}{\partial x^k \partial x^j}\right)_{m_0} = \left(\Gamma^i{}_{kj}\right)_{M_0}\bar{\mathbf{e}}_i$$

— d'autre part avec les relations (115) p. 222 :

$$\forall i, k \quad \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{m}}{\partial x^k \partial x^i}\right)_{m_0} = \left(\bar{\Gamma}^j{}_{ki}\right)_{m_0}\bar{\mathbf{e}}_j \quad \Rightarrow \quad \forall j, k \quad \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{m}}{\partial x^k \partial x^j}\right)_{m_0} = \left(\bar{\Gamma}^i{}_{kj}\right)_{m_0}\bar{\mathbf{e}}_i$$

On en déduit :

$$\forall i, j, k \quad \left(\Gamma^i{}_{kj}\right)_{M_0} = \left(\bar{\Gamma}^i{}_{kj}\right)_{m_0}$$

Nous pouvons alors étendre la notion de différentielle absolue aux espaces de Riemann. Quel que soit le point m_0, nous avons :

$$\forall i \quad Dv^i = dv^i + v^j {\omega^i}_j$$

Si le champ de vecteur est défini par ses composantes covariantes v_i, sa différentielle absolue a pour composantes covariantes :

$$\forall i \quad Dv_i = dv_i - v_j {\omega^j}_i$$

De même, on généralise aux espaces de Riemann la notion de dérivée covariante d'un vecteur. Les quantités,

$$\forall i, k \quad \nabla_k v^i = {v^i}_{,k} + v^j {\Gamma^i}_{jk}$$

sont les composantes mixtes du tenseur (d'ordre deux) *dérivée covariante* du vecteur $\mathbf{v}$.

Si le champ de vecteur est défini par ses composantes covariantes, les quantités,

$$\forall i, k \quad \nabla_k v_i = \partial_k v_i - v_j {\Gamma^i}_{jk}$$

sont les composantes covariantes du tenseur (d'ordre deux) dérivée covariante du covecteur $\tilde{v}$.

Ces formules sont généralisées aux dérivées covariantes de tenseurs riemanniens.

DÉFINITION 23.1.4. *Equipollence*
Deux vecteurs d'un espace euclidien sont équipollents s'ils ont même longueur, même direction et même sens : leur différence géométrique est nulle. Dans un espace riemannien, deux vecteurs d'origines infiniment voisines M et M' sont équipollents s'ils sont équipollents dans l'espace euclidien tangent en M.

Soient deux vecteurs d'origines infiniment voisines. Ils sont équipollents ssi la différentielle absolue Dv^i correspondant au transport du premier vecteur au second est nulle :

$$\boxed{\forall i \quad Dv^i = 0}$$

DÉFINITION 23.1.5. *Transport parallèle ou transport par équipollence*
Le transport parallèle d'un vecteur $\mathbf{v}$ d'origine M en un point infiniment voisin M', consiste à construire le vecteur $\mathbf{v}'$ d'origine M', équipollent à $\mathbf{v}$.

Les notions de représentation du second ordre et de métrique euclidienne osculatrice permettent d'étendre aux espaces de Riemann les notions d'analyse tensorielle euclidienne relative aux tenseurs attachés à deux points infiniment voisins. Il en est ainsi en particulier pour tous les opérateurs différentiels que nous avons étudiés au paragraphe 21.14 p. 243.

EXEMPLE 23.1.3. *Espace osculateur en un point d'une surface quelconque*
Soit une surface S quelconque (un espace proprement riemannien de dimension deux) plongée dans l'espace euclidien à trois dimensions, et soit P un plan tangent à S au point M. Soit (x, y, z) un système de coordonnées rectangulaires de centre M, tel que (x, y) soit dans le plan. Le carré de l'élément linéaire du plan est donné par :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Dans le système de coordonnées rectangulaires (x, y, z) la surface a pour équation $z = z(x, y)$, le carré de son élément linéaire est :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Or

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

$$dz^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dy^2 + 2\,\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\, dxdy$$

Si bien que

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dy^2 + 2\,\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\, dxdy \\ &= \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] dx^2 + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dy^2 + 2\,\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\, dxdy \end{aligned}$$

Au point M la coordonnée z est minimale, donc $\partial z/\partial x = \partial z/\partial y = 0$. Par conséquent, au point M les coefficients des métriques sont égales (et valent l'unité), la représentation est du premier ordre (relation (156) p. 260). De plus, les dérivées partielles du premier ordre de ces coefficients par rapport aux coordonnées sont aussi égales (et sont nulles puisque l'on dérive des constantes), la représentation est du second ordre (relation (161) p. 264). L'espace osculateur à la surface est donc ici l'espace tangent à la surface.

23.1.6 Vecteur accélération dans un espace riemannien

Dans l'espace riemannien $\mathcal{R}_n$, considérons un point mobile M dont les coordonnées curvilignes (x^i) sont fonction du temps, $M(x^i(t))$. Comme dans l'exemple 21.9.1 p. 236 pour un espace euclidien, les composantes contravariantes du vecteur vitesse ont pour expression

$$\forall i \quad v^i = \frac{dx^i}{dt}$$

et le vecteur accélération a pour composantes contravariantes :

$$\forall i \quad \gamma^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i{}_{kj}\,\frac{dx^k}{dt}\,\frac{dx^j}{dt}$$

23.2 Géodésiques d'un espace riemannien

Définition 23.2.1. *Géodésique*
Une géodésique d'un espace riemannien $\mathcal{R}_n$ est la trajectoire d'un point d'accélération nulle :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \ddot{x}^i + \Gamma^i{}_{kj}\,\dot{x}^k\dot{x}^j = 0 \tag{163}$$

Toute géodésique est définie par ce système de n équations différentielles ordinaires du second ordre, pour les n fonctions $x^i(\lambda)$ du paramètre quelconque λ (habituellement le temps ou l'abscisse curviligne).

> Remarque 42. *Dans l'espace-temps de la relativité générale, la quadriaccélération de la Terre est nulle, ce qui implique que le trivecteur accélération d'un observateur terrestre est nul (mesurée par un accéléromètre). Pour un observateur non terrestre, le trivecteur accélération de la Terre est non nul et son trivecteur vitesse varie en norme et en direction. Sa trajectoire est une géodésique de l'espace-temps courbé par le Soleil.*

Avec les relations (135) p. 235 :

$$\begin{aligned}
&\forall i \quad \gamma^i = 0 \\
&\forall i \quad \frac{Dv^i}{dt} = 0 \\
&\forall i \quad \frac{\nabla_k v^i \, dx^k}{dt} = 0 \\
&\forall i \quad v^k \nabla_k v^i = 0
\end{aligned}$$

Ces équations montrent que sur une géodésique le vecteur vitesse reste équipollent à lui-même. Cela permet d'étendre la notion de transport parallèle à un voisinage quelconque. Deux vecteurs formant un même angle avec une géodésique seront dits parallèles. Les géodésiques constituent l'extension en géométrie de Riemann des droites de l'espace euclidien. Les systèmes de coordonnées construits avec les géodésiques d'un espace courbe sont appelés *systèmes de coordonnées géodésiques* (voir le paragraphe 23.4.6 p. 280). Un système de coordonnées rectilignes, dit cartésien, est un système de coordonnées géodésiques de l'espace euclidien, construit avec des droites qui sont des géodésiques de l'espace euclidien.

Si nous adoptons pour paramètre indépendant l'abscisse curviligne s le long de la géodésique, le vecteur $\mathbf{u}$ de composantes dx^i/ds est un vecteur colinéaire à $d\boldsymbol{M}$ et unitaire :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\| &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\
&= u_i u^i \\
&= dx_i dx^i/(ds^2) \\
&= g_{ij} dx^j dx^i/(ds^2) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Il est tangent à la courbe, comme l'est la vitesse (voir (140) p. 238), les équations (163) donnent :

$$\forall i \quad \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i{}_{kj}\, u^k u^j = 0$$

En relativité générale, la présence de matière et/ou d'énergie (d'agitation thermique, électromagnétique, etc.) définit le tenseur énergie-impulsion qui détermine la métrique de l'espace-temps. d^2x^i/ds^2 est la quadriaccélération de l'espace-temps plat pseudo-euclidien de la relativité restreinte, et $\Gamma^i{}_{kj}\, u^k u^j$ est la courbure de l'espace-temps. Pour une masse m dans un champ de gravitation :

$$\forall i \quad m \frac{d^2 x^i}{ds^2} = -m \Gamma^i{}_{jk}\, u^k u^j \tag{164}$$

La force gravitationnelle de Newton est remplacée par le terme $-m\Gamma^i{}_{jk}\, u^k u^j$ de courbure du quadri-espace riemannien R_4 appelé espace-temps, dont les particules libres suivent une géodésique. Le tenseur métrique est le potentiel du champ de gravitation car sa dérivée donne l'intensité du champ de gravitation $\Gamma^i{}_{jk}$ (relations (127) p. 225).

Dans les espaces euclidiens et pseudo-euclidiens toute droite est à la fois une trajectoire à accélération nulle (donc une géodésique) et un extremum de longueur entre deux points de cette droite. Il en va de même en géométrie riemannienne, comme nous allons le voir.

Théorème 23.2.1. *Géodésique*
Une trajectoire joignant deux points a et b de $\mathcal{R}_n$ de longueur extrémale est une géodésique de cet espace.

$$d\int_{t_a}^{t_b}\sqrt{g_{ij}\,\frac{dx^i}{dt}\,\frac{dx^j}{dt}}\,dt = 0 \tag{165}$$

Une courbe de longueur extrémale entre deux points est invariante par changement de coordonnées. Nous retrouvons la propriété des géodésiques d'être indépendantes du système de coordonnées.

Démonstration. Si l'intégrale d'une fonction est extrémale, il en va de même du carré de cette fonction ou de n'importe quelle puissance de cette fonction :

$$d\int_{t_a}^{t_b} F\,dt = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad d\int_{t_a}^{t_b} F^2\,dt = 0$$

Remarque 43. *De façon générale, on peut remplacer la fonction dans l'intégrale par une fonction monotone (fonction croissante ou décroissante) de cette fonction sur l'intervalle $[t_a, t_b]$:*

$$d\int_{t_a}^{t_b} F\,dt = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad d\int_{t_a}^{t_b} f(F)\,dt = 0$$

Dans (165), posons $L = g_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j$,

$$d\int_{t_a}^{t_b} \sqrt{L}\,dt = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad d\int_{t_a}^{t_b} L\,dt = 0$$

en conservant la condition $L \geqslant 0$. Cela donne le système des n équations d'Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned}
&\forall i \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0\\
&\forall i \quad \frac{d}{dt}\left(2g_{ij}\,\dot{x}^j\right) - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(g_{kj}\,\dot{x}^k\dot{x}^j\right) = 0\\
&\forall i \quad 2g_{ij}\,\ddot{x}^j + 2\,\frac{dg_{ij}}{dx^k}\,\frac{dx^k}{dt}\,\dot{x}^j - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\,\dot{x}^k\dot{x}^j = 0\\
&\forall i \quad g_{ij}\,\ddot{x}^j + g_{ij,k}\,\dot{x}^k\dot{x}^j - \tfrac{1}{2}\partial_i g_{kj}\,\dot{x}^k\dot{x}^j = 0\\
&\forall i \quad g_{ij}\,\ddot{x}^j + \left(g_{ij,k} - \tfrac{1}{2}\,\partial_i g_{kj}\right)\dot{x}^k\dot{x}^j = 0
\end{aligned}$$

En remarquant que $g_{ij,k}\dot{x}^k\dot{x}^j = g_{ki,j}\dot{x}^k\dot{x}^j$:

$$\begin{aligned}
&\forall i \quad g_{ij}\,\ddot{x}^j + \left(\tfrac{1}{2}\,g_{ki,j} + \tfrac{1}{2}\,g_{ij,k} - \tfrac{1}{2}\,\partial_i g_{kj}\right)\dot{x}^k\dot{x}^j = 0\\
&\forall i \quad g_{ij}\,\ddot{x}^j + \tfrac{1}{2}\left(g_{ki,j} + g_{ij,k} - \partial_i g_{kj}\right)\dot{x}^k\dot{x}^j = 0
\end{aligned}$$

En se servant des relations (126) p. 225 qui donnent l'expression des symboles de Christoffel de première espèce en fonction des dérivées du tenseur métrique :

$$\forall i \quad g_{ij}\, \ddot{x}^j + \Gamma_{jik}\, \dot{x}^k \dot{x}^j = 0$$

Par multiplication contractée par g^{ih}, nous retrouvons bien le système des n équations différentielles (163) p. 266 d'une géodésique

$$\forall h \quad \ddot{x}^h + \Gamma^h{}_{jk}\, \dot{x}^j \dot{x}^k = 0$$

avec $g_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j \geqslant 0$. □

En raisonnant dans l'autre sens, c'est-à-dire en partant de (163) p. 266, on montre que la réciproque est vraie :

THÉORÈME 23.2.2. *Une géodésique est une trajectoire joignant deux points a et b de $\mathcal{R}_n$ de longueur extrémale.*

Nous pouvons donner une nouvelle définition d'une géodésique :

DÉFINITION 23.2.2. *Géodésique*
Une géodésique entre deux points d'un espace riemannien est la trajectoire de longueur extremale entre ces deux points.

Cette définition est indépendante du système de coordonnées puisque la notion de distance en est elle-même indépendante. Dans l'espace-temps de la relativité générale, la distance spatio-temporelle entre deux évènements quelconques sur la trajectoire de la Terre est extrémale. Dans le cas limite d'un espace-temps pseudo-euclidien, le carré de l'intervalle élémentaire d'univers a pour expression :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Or, les évènements sur la trajectoire terrestre ont lieu au même endroit dans le référentiel terrestre et seul le temps propre varie. Il s'agit alors de chercher la condition pour avoir ds^2 extrémal lorsque sa partie spatiale est nulle. C'est le cas lorsque l'intervalle de temps propre dt est *maximal* et rend le ds^2 maximal (si dt était minimal, une partie spatiale non nulle rendrait le ds^2 plus petit encore à cause des signes négatifs).

Si la forme quadratique fondamentale n'est pas définie, la détermination de la longueur de la géodésique

$$s = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}\, dt$$

devra se faire dans une région de l'espace où elle conserve un signe constant.

EXEMPLE 23.2.1. *Trouver l'équation des géodésiques à la surface d'une sphère.*

(1) Première méthode

L'exemple 12.1.2 p. 97 donne les composantes du tenseur métrique sur une sphère de rayon r en coordonnées (θ, ϕ) : $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2(\theta)$. Les dérivées partielles des g_{ij} sont nulles sauf $g_{\phi\phi,\theta} = 2r^2 \sin(\theta)\cos(\theta)$. Les relations (131) p. 227 donnent les symboles de Christoffel de deuxième espèce en coordonnées *orthogonales :*

$$\begin{cases} {\Gamma^i}_{ii} = \dfrac{g_{ii,i}}{2g_{ii}} \\ {\Gamma^i}_{ij} = \dfrac{g_{ii,j}}{2g_{ii}} \\ {\Gamma^j}_{ii} = -\dfrac{g_{ii,j}}{2g_{jj}} \\ {\Gamma^i}_{jk} = 0 \quad i, j, k \neq \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} {\Gamma^\theta}_{\theta\theta} = {\Gamma^\phi}_{\phi\phi} = 0 \\ {\Gamma^\theta}_{\theta\phi} = 0 \\ {\Gamma^\phi}_{\phi\theta} = \cot(\theta) \\ {\Gamma^\phi}_{\theta\theta} = 0 \\ {\Gamma^\theta}_{\phi\phi} = -\sin(\theta)\cos(\theta) \end{cases}$$

Les géodésiques ont alors pour équations :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{ds^2} + {\Gamma^\theta}_{\phi\phi}\left(\dfrac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{d^2\phi}{ds^2} + {\Gamma^\phi}_{\phi\theta}\dfrac{d\theta}{ds}\dfrac{d\phi}{ds} + {\Gamma^\phi}_{\theta\phi}\dfrac{d\phi}{ds}\dfrac{d\theta}{ds} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{ds^2} - \sin(\theta)\cos(\theta)\left(\dfrac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{d^2\phi}{ds^2} + \dfrac{2}{\tan(\theta)}\dfrac{d\theta}{ds}\dfrac{d\phi}{ds} = 0 \end{cases}$$

La seconde relation s'écrit :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{d\phi}{ds}\sin^2(\theta)\right) = 0$$

$$\frac{d\phi}{ds}\sin^2(\theta) = c^{ste}$$

La solution évidente $\phi = c^{ste}$ donne pour la première relation :

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0$$

$$\frac{d\theta}{ds} = a$$

$$\theta = as + \theta_0$$

où a est une constante. En prenant $\theta = 0$ en $s = 0$ on a $\theta_0 = 0$ et :

$$\theta = as$$

θ et ϕ étant constants

$$s = r\theta$$

d'où

$$a = \frac{1}{r}$$

L'équation d'une géodésique est donc :

$$\begin{cases} \theta = s/r \\ \phi = c^{ste} \end{cases} \tag{166}$$

Comme θ varie de 0 à π, la géodésique est un demi-arc de grand cercle allant d'un pôle à l'autre. Par symétrie sphérique, tous les arcs de grands cercles sont des géodésiques.

(2) Seconde méthode

À partir du carré de l'élément linéaire sur une sphère de rayon r :

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta)\, d\phi^2$$

où $g_{\theta\theta} = r^2$ *et* $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2(\theta)$*. Plutôt que de calculer les symboles de Christoffel, résolvons le problème de variation,*

$$\begin{aligned} d\int ds &= 0 \\ d\int r\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\, d\phi^2\right)^{1/2} &= 0 \\ d\int \left(\dot\theta^2 + \sin^2(\theta)\,\dot\phi^2\right)^{1/2} dp &= 0 \\ d\int \left(\dot\theta^2 + \sin^2(\theta)\,\dot\phi^2\right) dp &= 0 \end{aligned}$$

où le point désigne une dérivation par rapport au paramètre quelconque p*. Le Lagrangien s'écrit*

$$\mathscr{L}(\dot\theta, \dot\phi, \theta, \phi, p) = \dot\theta^2 + \sin^2(\theta)\,\dot\phi^2$$

et les équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot\theta}\right) - \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot\phi}\right) - \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} 2\,\dfrac{d\dot\theta}{dp} - 2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot\phi^2 = 0 & \text{(167a)} \\ \dfrac{d}{dp}\left(\sin^2(\theta)\dot\phi\right) = 0 & \text{(167b)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)\dot\phi^2 = 0 \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot\theta\dot\phi + \sin^2(\theta)\ddot\phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)\dot\phi^2 = 0 \\ \ddot\phi + 2\cot(\theta)\dot\theta\dot\phi = 0 \end{cases}$$

On retrouve les 2 *équations différentielles* (163) *p. 266 d'une géodésique, qui nous donne les symboles de Christoffel :*

$$\begin{cases} \ddot\theta + \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi}\,\dot\phi^2 = 0 \\ \ddot\phi + \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}\,\dot\theta\dot\phi + \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta}\,\dot\phi\dot\theta = 0 \end{cases} \quad \textit{avec} \quad \begin{cases} \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \cot(\theta) \end{cases}$$

L'équation (167b) *donne une intégrale première du mouvement :*

$$\begin{aligned} \sin^2(\theta)\dot\phi &= c_1 \\ \dot\phi &= c_1/\sin^2(\theta) \\ \dot\phi^2 &= c_1^2/\sin^4\theta \end{aligned}$$

Une seconde intégrale première est obtenue en posant $\mathscr{L} = c_2$ *(la variation d'une constante est nulle) :*

$$\dot\theta^2 + \sin^2(\theta)\,\dot\phi^2 = c_2$$

À partir des deux intégrales premières :

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}^2 + \frac{c_1^2}{\sin^2(\theta)} &= c_2 \\
\frac{\dot{\theta}^2}{c_1^2} &= \frac{c_2}{c_1^2} - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \\
\frac{\dot{\theta}^2}{\dot{\phi}^2 \sin^4\theta} &= \frac{c_2}{c_1^2} - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \\
\frac{1}{\sin^4\theta}\left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2 &= \frac{c_2}{c_1^2} - \frac{1}{\sin^2(\theta)}
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cot(\theta) \\
\frac{d\alpha}{d\phi} &= \frac{-\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} \frac{d\theta}{d\phi} \\
\left(\frac{d\alpha}{d\phi}\right)^2 &= \frac{1}{\sin^4\theta}\left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2 \\
&= \frac{c_2}{c_1^2} - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \\
&= \frac{c_2}{c_1^2} - \frac{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} \\
&= \frac{c_2}{c_1^2} - 1 - \alpha^2
\end{aligned}$$

Donc α est une fonction sinus :

$$\begin{aligned}
\alpha &= a\sin(\phi + b) \\
\frac{d\alpha}{d\phi} &= a\cos(\phi + b) \\
\left(\frac{d\alpha}{d\phi}\right)^2 &= a^2\cos^2(\phi + b)
\end{aligned}$$

On trouve l'expression de la nouvelle constante :

$$\begin{aligned}
a^2\cos^2(\phi + b) &= \frac{c_2}{c_1^2} - 1 - a^2\sin^2(\phi + b) \\
a^2 &= \frac{c_2}{c_1^2} - 1
\end{aligned}$$

Revenons à l'ancienne variable :

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} &= a\sin(\phi + b) \\
\cos(\theta) &= \sin(\theta)\,(A\cos(\phi) + B\sin(\phi)) \\
r\cos(\theta) &= Ar\sin(\theta)\cos(\phi) + Br\sin(\theta)\sin(\phi) \\
z &= Ax + By
\end{aligned}$$

> *Les géodésiques sont donc les sections de la sphère par des plans passant par son centre, c'est-à-dire des grands cercles.*

23.3 Métrique euclidienne de raccordement

23.3.1 Développement d'une courbe de $\mathcal{R}_n$ sur l'espace ponctuel euclidien

Dans un espace riemannien $\mathcal{R}_n$, soit C une courbe d'équations paramétriques $x^i = x^i(t)$. À chaque point M de C faisons correspondre un point m et un repère $(m, \mathbf{e}_i)$ de l'espace ponctuel euclidien $\mathcal{E}_n$. Au point M_0 de C pour $t = 0$, faisons correspondre un point m_0 arbitrairement choisi dans $\mathcal{E}_n$, et un repère $(m_0, \mathbf{e}_{i_0})$ indéterminé en orientation mais défini en forme (angles entre les vecteurs) et grandeur par :

$$\forall i, j \quad \mathbf{e}_{i_0} \cdot \mathbf{e}_{j_0} = (g_{ij})_{M_0} \tag{168}$$

Posons également que les points m de l'espace euclidien et les vecteurs des repères naturels dans $\mathcal{E}_n$ vérifient les relations différentielles :

$$\begin{cases} d\boldsymbol{m} = dx^i \mathbf{e}_i \\ \forall i \quad d\mathbf{e}_i = \left(\Gamma^h{}_{ki}\right)_M dx^k \mathbf{e}_h \end{cases} \tag{169}$$

où les symboles de Christoffel au point M sont évalués dans l'espace riemannien et ne dépendent que du paramètre t.

L'intégration du système différentiel (169) pour obtenir $m(t)$ et les $\mathbf{e}_i(t)$ avec les conditions initiales que nous nous sommes données, fait alors correspondre à la courbe C de $\mathcal{R}_n$, une courbe Γ de $\mathcal{E}_n$, appelée *développement de la courbe* C sur l'espace euclidien.

La modification des conditions initiales revient à effectuer un déplacement quelconque de la courbe Γ dans l'espace euclidien. Par suite, Γ se trouve définie à un déplacement près dans $\mathcal{E}_n$, et est indéterminée en orientation.

23.3.2 Métrique euclidienne de raccordement le long d'une courbe

Au sujet du développement de la courbe Γ de C, nous allons établir le théorème suivant :

Théorème 23.3.1. *Métrique euclidienne de raccordement*

On peut trouver dans l'espace ponctuel euclidien $\mathcal{E}_n$ une métrique telle que les valeurs numériques que prennent ses coefficients et leurs dérivées premières le long de la courbe Γ de $\mathcal{E}_n$, coïncident avec les valeurs numériques que prennent les coefficients de la métrique riemannienne et leurs dérivées premières aux points homologues de la courbe C de $\mathcal{R}_n$.

Autrement dit, on peut construire une métrique euclidienne qui soit osculatrice à la métrique riemannienne en tous les points de C.

Démonstration. Nous pouvons choisir les coordonnées dans $\mathcal{R}_n$ de sorte que la première coordonnée soit la courbe C, les autres coordonnées étant nulles :

$$\forall M \in C \quad \begin{cases} x^1_M = t \\ x^2_M = \cdots = x^n_M = 0 \end{cases}$$

Avec la convention que les indices grecs varient de 2 à n, le système différentiel (169) p. 273 s'écrit :

$$\begin{cases} d\boldsymbol{m} = dx^1 \mathbf{e}_1 \\ \forall i \quad d\mathbf{e}_i = \left(\Gamma^h{}_{ki}\right)_{x^\alpha=0} dx^1 \mathbf{e}_h \end{cases} \tag{170}$$

où les symboles de Christoffel sont évalués sur la courbe C, c'est-à-dire pour $x^\alpha = 0$. À tout point $P(x^i)$ au voisinage d'un point M de C, faisons correspondre un point p au voisinage du point m de $\bar{C}$, en posant

$$\boldsymbol{mp} = \left[x_p^i - x_m^i + \tfrac{1}{2}\Gamma^i{}_{jk}\left(x_p^j - x_m^j\right)\left(x_p^k - x_m^k\right) + \Phi_3^i\left(x_p^r - x_m^r\right)\right]\mathbf{e}_i \tag{171}$$

où les fonctions Φ_3^i sont du 3^e ordre par rapport aux variables $x_p^r - x_m^r$ pour $x_p^r - x_m^r$ voisins de zéro. Le point m décrivant la courbe $\bar{C}$, ses coordonnées sont telles que :

$$\begin{cases} x_m^1 = t \\ x_m^\alpha = 0 \end{cases}$$

Le point p étant au voisinage de m :

$$\begin{cases} x_p^1 = x_m^1 \\ x_p^\alpha \neq 0 \end{cases}$$

La relation (171) devient :

$$\boldsymbol{mp} = x_p^\beta \mathbf{e}_\beta + \left[\tfrac{1}{2}\left(\Gamma^i{}_{\gamma\delta}\right) x_p^\gamma x_p^\delta + \Phi_3^i\left(x_p^\epsilon\right)\right]\mathbf{e}_i \tag{172}$$

Le point p de $\mathcal{E}_n$ se trouve défini comme fonction des n variables (x^i). Les (x^i) constituent donc aussi un systéme de coordonnées curvilignes pour $\mathcal{E}_n$ dans le voisinage de $\bar{C}$. Pour ce système de coordonnées, le repère naturel en $m(t, x^\alpha = 0)$ est défini par :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^1}\right)_{x^\alpha=0} = \dfrac{d\boldsymbol{m}}{dy^1} = \mathbf{e}_1 \\ \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^\beta}\right)_{x^\alpha=0} = \mathbf{e}_\beta \end{cases} \tag{173}$$

Ce repère naturel coïncide avec le repère $(m, \mathbf{e}_i)$ du développement de la courbe dans l'espace ponctuel euclidien $\mathcal{E}_n$. La métrique de $\mathcal{E}_n$ dans le système de coordonnées (x^i), admet donc pour coefficients en m les produits scalaires $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$.

Montrons qu'en tout point de la courbe C, ces coefficients sont égaux à ceux de la métrique riemannienne. Avec la seconde relation de (170) nous avons :

$$\begin{aligned} d(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) &= d\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{e}_j \\ &= \left(\Gamma^i{}_{kh}\right)_M \mathbf{e}_h \cdot d\mathbf{e}_j dx^k + \left(\Gamma^h{}_{kj}\right)_M \mathbf{e}_h \cdot d\mathbf{e}_i dx^k \\ &= \left[\left(\Gamma^i{}_{kh}\right)_M g_{hj} + \left(\Gamma^h{}_{kj}\right)_M g_{hi}\right] dy^k \\ &= dg_{ij} \end{aligned}$$

Les quantités $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ et g_{ij} satisfont donc au même système différentiel. Or, d'après la relation (168) p. 273, les conditions initiales sont les mêmes. Il en résulte

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij}$$

identiquement quand M décrit C. Les métriques euclidienne et riemannienne sont donc tangentes en tous point de C.

Pour monter qu'elles sont osculatrices (tangentes à l'ordre deux), il faut monter que les symboles de Christoffel en m dans $\mathcal{E}_n$ sont égaux à ceux en M dans $\mathcal{R}_n$. Pour la première coordonnée, d'après les relations (170) p. 274 et (173) :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial x^i \partial x^1}\right)_{x^\alpha=0} &= \frac{d}{dx^1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^i}\right)_{x^\alpha=0} \\
\left(\Gamma^h{}_{1i}\right)_M \mathbf{e}_h &= \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^1} \\
&= \left(\Gamma^h{}_{1i}\right)_{x^\alpha=0} \mathbf{e}_h \\
\left(\Gamma^h{}_{1i}\right)_M &= \left(\Gamma^h{}_{1i}\right)_{x^\alpha=0}
\end{aligned}$$

Pour les autres coordonnées, avec (172) :

$$\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\right)_{x^\alpha=0} = \left(\Gamma^i{}_{\beta\gamma}\right)_{x^\alpha=0} \mathbf{e}_i$$

(Le facteur $\frac{1}{2}$ disparait car la somme dans (172) donne deux termes). Les métriques sont donc osculatrices, et la métrique euclidienne obtenue est appelée *métrique euclidienne de raccordement le long de C*. □

Ainsi, grâce à un choix convenable de système de coordonnées, on peut rendre nuls tous les symboles de Christoffel, non seulement en un point donné mais le long d'une courbe de l'espace de Riemann. En relativité générale, cela revient à dire qu'il est toujours possible de trouver un référentiel qui soit inertiel le long d'une ligne d'univers quelconque, géodésique ou non.

23.3.3 Application géométrique à la métrique euclidienne de raccordement

Soit C une courbe de l'espace riemannienn $\mathcal{R}_n$, en chaque point M de C on attache un vecteur unitaire $\boldsymbol{u}$ tangent à la courbe. Lorsque l'on passe du point M à un point de C infiniment voisin, le vecteur $\boldsymbol{u}$ est transporté parallèlement (définition 23.1.5 p. 265), sa différentielle absolue est nulle. Cette différentielle absolue est égale à celle du vecteur image dans l'espace ponctuel euclidien $\mathcal{E}_n$, dans une représentation du second ordre du voisinage de M (par exemple celle d'une métrique euclidienne de raccordement). Le vecteur image n'est autre que le vecteur unnitaire tangent à la courbe Γ développement de C. Par transport parallèle d'un vecteur dans un espace euclidien, on construit une droite. On en conclue que les géodésiques d'un espace riemannien sont les courbes qui se développent sur l'espace euclidien selon des droites.

23.4 Tenseur de courbure d'un espace riemannien

Introduisons le tenseur de courbure d'un espace riemannien en suivant une méthode géométrique due à Élie Cartan. Dans un espace riemannien on constate que l'orientation d'un repère partant d'un point M dépend au point d'arrivée N du trajet qu'il a suivi. Par exemple un repère qui parcourt un triangle sphérique ne retrouve pas son orientation de départ à son retour au point initial, et sa nouvelle orientation dépend du sens de parcours. Notez qu'il n'est pas nécessaire de suivre des géodésiques pour mettre en évidence la rotation d'un repère.

23.4.1 Quasi-parallélogramme

Introduisons deux symboles de différentiation, d et δ, que l'on supposera *échangeables*, c'est-à-dire tels que :

$$\forall j \quad \delta dx^j = d\delta x^j \tag{174}$$

Sous cette hypothèse, pour une fonction scalaire $f(x^j)$ deux fois continûment différentiable des x^j, nous avons :

$$\begin{aligned} d\delta f &= d\left(\partial_j f \delta x^j\right) \\ &= \partial_{ji} f \delta x^j dx^i + \partial_j f d\delta x^j \\ &= \partial_{ij} f dx^i \delta x^j + \partial_i f \delta dx^i \\ &= \delta\left(\partial_i f \delta x^i\right) \\ &= \delta df \end{aligned}$$

La fonction f pouvant être par exemple un changement de variables, on en déduit que le caractère échangeable de deux symboles de différentiation subsiste par un changement arbitraire des variables x^j.

Soit $M(x^j)$ un point de $\mathcal{R}_n$:

— la différentiation d fait passer de $M(x^j)$ à $M_1(x^j + dx^j) = M + d\boldsymbol{M}$

— la différentiation δ fait passer de $M(x^j)$ à $M_2(x^j + \delta x^j) = M + \delta\boldsymbol{M}$

Nous supposerons que $d\boldsymbol{M}$ et $\delta\boldsymbol{M}$ ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire que dx^j et δx^j ne sont pas proportionnels.

— de $M_1(x^j + dx^j)$, la différentiation δ fait passer au point $M_3(x^j + \delta x^j + dx^j + \delta dx^j)$

— de $M_2(x^j + \delta x^j)$, la différentiation d fait passer au point $M_4(x^j + dx^j + \delta x^j + d\delta x^j)$

D'après les relations (174) p. 276, les points M_3 et M_4 sont confondus. Le circuit fermé formé des quatre points M, M_1, M_3, M_2 est appelé *quasi-parallélogramme* dans $\mathcal{R}_n$.

23.4.2 Développement du quasi-parallélogramme

Développons le quasi-parallélogramme dans l'espace ponctuel euclidien $\mathcal{E}_n$ tangent à l'espace riemannien au point M. Pour rester dans cet espace nous nous maintenons au voisinage infinitésimal du point M en considérant un trajet fermé infiniment petit. Lorsque dans $\mathcal{R}_n$ on passe du point M au point infiniment proche M_1, dans $\mathcal{E}_n$ on passe du repère $(m, \mathbf{e}_j)$ au repère $(m + d\boldsymbol{m}, \mathbf{e}_j + d\mathbf{e}_j)$, et d'après (169) p. 273 :

$$\begin{cases} d\boldsymbol{m} = dx^j \mathbf{e}_j \\ \forall j \quad d\mathbf{e}_j = \omega^i{}_j \mathbf{e}_i = \Gamma^i{}_{jk} dx^k \mathbf{e}_i \end{cases}$$

Puis, lorsque dans $\mathcal{R}_n$ on passe du point M_1 au point M_3, dans $\mathcal{E}_n$ on passe au repère $(m + d\boldsymbol{m} + \delta\boldsymbol{m} + \delta d\boldsymbol{m}, \mathbf{e}_j + d\mathbf{e}_j + \delta\mathbf{e}_j + \delta d\mathbf{e}_j)$.

Maintenant, si dans $\mathcal{R}_n$ on passe du point M au point M_2, dans $\mathcal{E}_n$ on passe du repère $(m, \mathbf{e}_j)$ au repère $(m + \delta\boldsymbol{m}, \mathbf{e}_j + \delta\mathbf{e}_j)$, et avec les relations (169) :

$$\begin{cases} \delta\boldsymbol{m} = \delta x^j \mathbf{e}_j \\ \forall j \quad \delta\mathbf{e}_j = \tilde{\omega}^i{}_j \mathbf{e}_i = \Gamma^i{}_{jk} \delta x^k \mathbf{e}_i \end{cases}$$

Le tilde indique la forme différentielle prise par ω pour les δx^j. Puis, lorsque dans $\mathcal{R}_n$ on passe du point M_2 au point M_3, dans $\mathcal{E}_n$ on passe au repère $(m + \delta\boldsymbol{m} + d\boldsymbol{m} + d\delta\boldsymbol{m}, \mathbf{e}_j + \delta\mathbf{e}_j + d\mathbf{e}_j + d\delta\mathbf{e}_j)$.

Comparons les positions des repères finaux :

$$\begin{aligned} d\delta \boldsymbol{m} - \delta d\boldsymbol{m} &= d(\delta x^j \mathbf{e}_j) - \delta(dx^j \mathbf{e}_j) \\ &= \delta x^j d\mathbf{e}_j - dx^j \delta \mathbf{e}_j \\ &= \left(\delta x^j \Gamma^i{}_{jk}\, dx^k - dx^j \Gamma^i{}_{jk}\, \delta x^k\right) \mathbf{e}_i \\ &= \left(\delta x^j \Gamma^i{}_{jk}\, dx^k - dx^k \Gamma^i{}_{kj}\, \delta x^j\right) \mathbf{e}_i \\ &= \left(\Gamma^i{}_{jk} - \Gamma^i{}_{kj}\right) dx^k \delta x^j \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

On suppose que les conditions d'intégrabilité des points sont satisfaites, et donc que les symboles de Christoffel de deuxième espèce sont symétriques par rapport à leurs indices inférieurs :

$$d\delta \boldsymbol{m} - \delta d\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$$

Les développements conduisent alors au même repère final, et le quasi-parallélogramme est fermé également dans $\mathcal{E}_n$.

Comparons les vecteurs des deux repères finaux :

$$\begin{aligned} \forall j \quad d\delta \mathbf{e}_j - \delta d\mathbf{e}_j &= d\left(\tilde{\omega}^i{}_j \mathbf{e}_i\right) - \delta\left(\omega^i{}_j \mathbf{e}_i\right) \\ &= \left(d\tilde{\omega}^i{}_j - \delta\omega^i{}_j\right) \mathbf{e}_i + \tilde{\omega}^k{}_j d\mathbf{e}_k - \omega^k{}_j \delta\mathbf{e}_k \\ &= \left(d\tilde{\omega}^i{}_j - \delta\omega^i{}_j + \tilde{\omega}^k{}_j \omega^i{}_k - \omega^k{}_j \tilde{\omega}^i{}_k\right) \mathbf{e}_i \\ &= \Omega^i{}_j \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\forall i, j \quad \Omega^i{}_j \triangleq d\tilde{\omega}^i{}_j - \delta\omega^i{}_j + \tilde{\omega}^k{}_j \omega^i{}_k - \omega^k{}_j \tilde{\omega}^i{}_k \tag{175}$$

Les vecteurs finaux ont mêmes forme et grandeur puisque les produits scalaires de ces vecteurs sont donnés par les coefficients de la métrique en M_3. Par conséquent, les quantités $\Omega^i{}_j$ définissent la rotation permettant de passer d'un repère à l'autre autour du point m_3 de $\mathcal{E}_n$. La courbure d'un espace riemannien se manifeste ainsi par le fait qu'en développant sur l'espace euclidien, à partir d'un même repère initial, deux chemins ayant mêmes extrémités, les repères finaux sont différents en orientation.

Remarque 44. *Nous aurions pu comparer les repères finaux par* $\forall j \;\; \delta d\mathbf{e}_j - d\delta\mathbf{e}_j$. *Ainsi le tenseur rotation* $\Omega^i{}_j$ *est défini au signe près.*

23.4.3 Tenseur rotation

Théorème 23.4.1. *Les quantités* $\Omega^i{}_j$ *sont les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux.*

Démonstration. Soit un changement de base naturelle tel que :

$$\begin{aligned} \forall j \quad \mathbf{e}_j &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \mathbf{e}_{k'} \\ \forall j \quad \delta\mathbf{e}_j &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \delta\mathbf{e}_{k'} + \delta\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\right) \mathbf{e}_{k'} \\ \forall j \quad d\delta\mathbf{e}_j &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} d\delta\mathbf{e}_{k'} + d\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\right) \delta\mathbf{e}_{k'} + \delta\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\right) d\mathbf{e}_{k'} + d\delta\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\right) \mathbf{e}_{k'} \end{aligned}$$

De même :

$$\forall j \quad \delta d\mathbf{e}_j = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\delta d\mathbf{e}_{k'} + \delta\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\right) d\mathbf{e}_{k'} + d\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\right)\delta\mathbf{e}_{k'} + \delta d\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\right)\mathbf{e}_{k'}$$

d et δ étant échangeables devant les $\partial x^{k'}/\partial x^j$:

$$\begin{aligned}
\forall j \quad d\delta\mathbf{e}_j - \delta d\mathbf{e}_j &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,d\delta\mathbf{e}_{k'} - \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\delta d\mathbf{e}_{k'} \\
&= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,(d\delta\mathbf{e}_{k'} - \delta d\mathbf{e}_{k'}) \\
\forall j \quad \Omega^i{}_j\mathbf{e}_i &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\Omega^{h'}{}_{k'}\mathbf{e}_{h'} \\
&= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\,\Omega^{h'}{}_{k'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{h'}}\,\mathbf{e}_i \\
\forall h, j \quad \Omega^i{}_j &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial x^{h'}}\,\Omega^{h'}{}_{k'}
\end{aligned}$$

□

23.4.4 Tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de seconde espèce

À partir des relations (175) p. 277 :

$$\forall i, j \quad \Omega^i{}_j = d\tilde{\omega}^i{}_j - \delta\omega^i{}_j + \tilde{\omega}^k{}_j\omega^i{}_k - \omega^k{}_j\tilde{\omega}^i{}_k$$

— avec d'une part

$$\begin{aligned}
\forall i, j \quad d\tilde{\omega}^i{}_j - \delta\omega^i{}_j &= d\left(\Gamma^i{}_{sj}\,\delta x^s\right) - \delta\left(\Gamma^i{}_{sj}\,dx^s\right) \\
&= \partial_r\Gamma^i{}_{sj}\,dx^r\delta x^s + \Gamma^i{}_{sj}\,d\delta x^s - \partial_r\Gamma^i{}_{sj}\,\delta x^r dx^s - \Gamma^i{}_{sj}\,\delta dx^s \\
&= \partial_r\Gamma^i{}_{sj}\,dx^r\delta x^s - \partial_r\Gamma^i{}_{sj}\,\delta x^r dx^s \\
&= \partial_r\Gamma^i{}_{sj}\,dx^r\delta x^s - \partial_s\Gamma^i{}_{rj}\,\delta x^s dx^r \\
&= \left(\partial_r\Gamma^i{}_{sj} - \partial_s\Gamma^i{}_{rj}\right) dx^r\delta x^s
\end{aligned}$$

— et d'autre part

$$\begin{aligned}
\forall i, j \quad \tilde{\omega}^k{}_j\omega^i{}_k - \omega^k{}_j\tilde{\omega}^i{}_k &= \Gamma^k{}_{sj}\,\delta x^s\,\Gamma^i{}_{rk}\,dx^r - \Gamma^k{}_{rj}\,dx^r\,\Gamma^i{}_{sk}\,\delta x^s \\
&= \left(\Gamma^k{}_{sj}\,\Gamma^i{}_{rk} - \Gamma^k{}_{rj}\,\Gamma^i{}_{sk}\right) dx^r\delta x^s
\end{aligned}$$

nous avons :

$$\begin{aligned}
\forall i, j \quad \Omega^i{}_j &= \left(\partial_r\Gamma^i{}_{sj} - \partial_s\Gamma^i{}_{rj}\right) dx^r\delta x^s + \left(\Gamma^k{}_{sj}\,\Gamma^i{}_{rk} - \Gamma^k{}_{rj}\,\Gamma^i{}_{sk}\right) dx^r\delta x^s \\
&= \left(\partial_r\Gamma^i{}_{sj} - \partial_s\Gamma^i{}_{rj} + \Gamma^k{}_{sj}\,\Gamma^i{}_{rk} - \Gamma^k{}_{rj}\,\Gamma^i{}_{sk}\right) dx^r\delta x^s \\
&= R^i{}_{j,rs}\,dx^r\delta x^s
\end{aligned}$$

Les dx^r et les δx^s étant les composantes contravariantes de deux vecteurs arbitraires, et les $\Omega^i{}_j$ étant les composantes mixtes d'un tenseur d'ordre deux, il en résulte que les quantités $R^i{}_{j,rs}$ sont les composantes d'un tenseur d'ordre quatre, trois fois covariant et une fois contravariant, antisymétrique par rapport aux indices r et s. Tout comme le tenseur rotation, il est défini au signe près.

Définition 23.4.1. *Tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de seconde espèce*
Le tenseur d'ordre quatre

$$\forall i,j,r,s \quad R^i{}_{j,rs} \triangleq \partial_r \Gamma^i{}_{js} - \partial_s \Gamma^i{}_{jr} + \Gamma^k{}_{js}\,\Gamma^i{}_{kr} - \Gamma^k{}_{jr}\,\Gamma^i{}_{ks}$$

est appelé tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de seconde espèce de l'espace riemannien R_n.

Etant donnée une forme différentielle quadratique arbitraire, pour qu'elle soit la métrique d'un espace euclidien, il est nécessaire que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$\forall i,j,r,s \quad R^i{}_{j,rs} = 0 \tag{176}$$

Dans ce cas, l'orientation du repère ne dépend pas du chemin suivi (par exemple le long d'un parallélogramme), et les conditions (112) p. 222 sont intégrables.

Lorsque la variété correspondante est topologiquement équivalente à l'espace euclidien, on démontre que ces conditions sont suffisantes. Lorsque la variété correspondante n'est pas topologiquement équivalente à l'espace euclidien, si les conditions (176) sont satisfaites, l'espace riemannien est dit *localement euclidien* : ses propriétés purement locales ne diffèrent pas de celles d'un espace euclidien.

23.4.5 Tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de première espèce

En abaissant l'indice contravariant dans la définition 23.4.1 p. 279, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\forall i,j,r,s \quad R_{ij,rs} &= g_{ih}\, R^h{}_{j,rs} \\
&= g_{ih}\left(\partial_r \Gamma^h{}_{sj} - \partial_s \Gamma^h{}_{rj} + \Gamma^k{}_{sj}\,\Gamma^h{}_{rk} - \Gamma^k{}_{rj}\,\Gamma^h{}_{sk}\right) \\
&= g_{ih}\,\partial_r \Gamma^h{}_{sj} - g_{ih}\,\partial_s \Gamma^h{}_{rj} + \Gamma^k{}_{sj}\,\Gamma_{irk} - \Gamma^k{}_{rj}\,\Gamma_{isk} \\
&= \partial_r\left(g_{ih}\,\Gamma^h{}_{sj}\right) - \Gamma^h{}_{sj}\,\partial_r g_{ih} - \partial_s\left(g_{ih}\,\Gamma^h{}_{rj}\right) + \Gamma^h{}_{rj}\,\partial_s g_{ih} + \Gamma^k{}_{sj}\,\Gamma_{irk} - \Gamma^k{}_{rj}\,\Gamma_{isk} \\
&= \partial_r\,\Gamma_{isj} - \partial_s\,\Gamma_{irj} + \Gamma^k{}_{sj}\left(\Gamma_{irk} - \partial_r g_{ik}\right) - \Gamma^k{}_{rj}\left(\Gamma_{isk} - \partial_s g_{ik}\right)
\end{aligned}$$

Les relations (123) p. 224 donnent :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} &= \partial_k g_{ij} \\
\Gamma_{ijk} - \partial_k g_{ij} &= -\Gamma_{jik} \\
\Gamma_{ikr} - \partial_r g_{ik} &= -\Gamma_{kir} \\
\Gamma_{irk} - \partial_r g_{ik} &= -\Gamma_{kir}
\end{aligned}
\qquad \text{et} \qquad
\begin{aligned}
\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} &= \partial_k g_{ij} \\
\Gamma_{ijk} - \partial_k g_{ij} &= -\Gamma_{jik} \\
\Gamma_{iks} - \partial_s g_{ik} &= -\Gamma_{kis} \\
\Gamma_{isk} - \partial_s g_{ik} &= -\Gamma_{kis}
\end{aligned}$$

si bien que l'on a la définition suivante :

Définition 23.4.2. *Tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de première espèce*
Le tenseur d'ordre quatre

$$\forall i,j,r,s \quad R_{ij,rs} \triangleq \partial_r\,\Gamma_{ijs} - \partial_s\,\Gamma_{ijr} + \Gamma^k{}_{jr}\,\Gamma_{kis} - \Gamma^k{}_{js}\,\Gamma_{kir}$$

est appelé tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de première espèce de l'espace de Riemann R_n.

En dérivant les relations (126) p. 225 :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijk} &= \tfrac{1}{2}\left(g_{ij,k} + g_{ki,j} - g_{jk,i}\right) \\ \Gamma_{isj} &= \tfrac{1}{2}\left(g_{is,j} + g_{ji,s} - g_{sj,i}\right) \\ \partial_r \Gamma_{isj} &= \tfrac{1}{2}\left(g_{is,jr} + g_{ji,sr} - g_{sj,ir}\right) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \Gamma_{ijk} &= \tfrac{1}{2}\left(g_{ij,k} + g_{ki,j} - g_{jk,i}\right) \\ \Gamma_{irj} &= \tfrac{1}{2}\left(g_{ir,j} + g_{ji,r} - g_{rj,i}\right) \\ \partial_s \Gamma_{irj} &= \tfrac{1}{2}\left(g_{ir,js} + g_{ji,rs} - g_{rj,is}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall i,j,r,s \quad R_{ij,rs} &= \tfrac{1}{2}\left(g_{is,jr} + g_{ji,sr} - g_{sj,ir}\right) - \tfrac{1}{2}\left(g_{ir,js} + g_{ji,rs} - g_{rj,is}\right) - \Gamma^k{}_{sj}\,\Gamma_{kri} + \Gamma^k{}_{rj}\,\Gamma_{ksi} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(g_{is,jr} + g_{rj,is} - g_{sj,ir} - g_{ir,js}\right) - \Gamma^k{}_{sj}\,\Gamma_{kri} + \Gamma^k{}_{rj}\,\Gamma_{ksi} \end{aligned} \tag{177}$$

23.4.6 Système de coordonnées localement géodésiques

En tout point d'un espace de Riemann il est toujours possible de définir un *système de coordonnées localement géodésiques*. Ce système de coordonnées utilise les géodésiques passant par un point donné comme système de coordonnées pour les points du voisinage. On peut toujours choisir ce système de coordonnées de sorte qu'il soit orthonormal, on parle alors de *système de coordonnées géodésiques normal*, ou *système de coordonnées riemanniennes normal*. En tout point d'un espace passent une infinité de géodésiques, une par direction. Par exemple une infinité de droites passent par un point du plan ou de l'espace euclidien, une infinité de grands cercles passent par un point de la sphère. L'ensemble des géodésiques passant par un point ne se croisent pas ailleurs qu'en ce point si l'on prend un voisinage suffisamment petit. Les coordonnées géodésiques sont donc utilisées la plupart du temps localement. Cela revient à se placer dans l'espace plat tangent au point considéré à l'espace de Riemann, et à utiliser un système de coordonnées rectilignes.

L'emploi de ce système facilite les calculs car les propriétés (intrinsèques) des tenseurs démontrées dans ce système de coordonnées sont valides dans tous les autres systèmes de coordonnées. Nous montrons que dans les systèmes de coordonnées localement géodésiques, les dérivées des composantes du tenseur métrique sont nulles et par conséquent les symboles de Christoffel également. En ce point, la dérivée covariante se réduit à la dérivée partielle ordinaire.

Soit (x^i) un système de coordonnées curviligne d'un espace riemannien R_n. Soit un point $M(a^1, \ldots, a^n)$ de R_n et soit P un point suffisamment voisin de M pour que deux géodésiques passant par M ne passent pas par P. Considérons l'unique géodésique MP passant par M et P, d'équations paramétriques

$$\forall i \qquad x^i = x^i(s)$$

où le paramètre est l'abscisse curviligne s. Prenons le point $M(a^i)$ pour origine de l'abscisse curviligne de cette géodésique :

$$\forall i \quad x^i(0) = a^i$$

Les coordonnées des points de cette géodésique peuvent se développer en série de puissance de s au voisinage de M :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad x^i(s) = a^i + s\left(\frac{dx^i}{ds}\right)_M + \frac{1}{2}\,s^2\left(\frac{d^2x^i}{ds^2}\right)_M + \ldots$$

Les coordonnées du vecteur unitaire $\mathbf{u}(u^i)$ tangent à la géodésique MP au point M s'écrivent :

$$\forall i \quad u^i = \left(\frac{dx^i}{ds}\right)_M$$

Ce vecteur unitaire est dans l'hyperplan tangent à l'espace riemannien R_n.

Remarque 45. *L'hyperplan en question est un espace pré-euclidien de même dimension n que l'espace riemannien, qui contient toutes les tangentes en M à toutes les courbes de R_n passant par M.*

Les équations (163) p. 266 d'une géodésique nous donnent l'expression de la dérivée seconde des coordonnées de la géodésique $x^i(s)$ par rapport à s au point M,

$$\forall i \quad \left(\frac{d^2x^i}{ds^2}\right)_M = -\Gamma^i{}_{kj}\left(\frac{dx^k}{ds}\right)_M\left(\frac{dx^j}{ds}\right)_M$$

si bien que :

$$\forall i = 1,\ldots,n \qquad x^i = a^i + su^i - \tfrac{1}{2}\,s^2\left(\Gamma^i{}_{kj}\right)_M u^k u^j + \ldots$$

Plaçons-nous dans le système de coordonnées de centre M en effectuant le changement de coordonnées (ou en posant $a^i = 0\ \forall i$)

$$\forall i \quad x^{i'} = x^i - a^i \tag{178}$$

Alors

$$\forall i = 1,\ldots,n \qquad x^{i'} = su^i - \tfrac{1}{2}\,s^2\left(\Gamma^i{}_{kj}\right)_M u^k u^j + \ldots$$

Définition 23.4.3. *Coordonnées localement géodésiques*
Les coordonnées localement géodésiques y^i d'un point quelconque P suffisamment proche de $M(a^i = 0)$ sont définies par :

$$\forall i \quad y^i \triangleq su^i \tag{179}$$

où s est la distance de M à P le long de la géodésique.

Les coordonnées localement géodésiques ne conservent que la partie linéaire en s des coordonnées curvilignes en prenant les tangentes aux géodésiques, et reviennent à effectuer le changement de coordonnées :

$$\forall i = 1,\ldots,n \qquad y^i = x^{i'} + \tfrac{1}{2}\,s^2\left(\Gamma^i{}_{kj}\right)_M u^k u^j$$

On a supprimé localement au point M la courbure du système de coordonnées géodésique $(x^{i'})$. Les termes de courbure d'ordre supérieur sont négligés.

Remarque 46. *Parmi l'infinité de géodésiques passant par le point M de l'espace riemannien R_n, nous pouvons en choisir n dont les tangentes en M sont perpendiculaires, et construire ainsi un système de coordonnées géodésiques normal.*

Théorème 23.4.2. *Au point origine M des coordonnées localement géodésiques, les symboles de Christoffel de première et de deuxième espèce sont nuls, ainsi que les dérivées partielles des composantes du tenseur métrique.*

Démonstration. Pour un vecteur unitaire $\mathbf{u}$ de direction fixée et d'origine M, la dérivée de (179) donne :

$$\forall i \quad \frac{dy^i}{ds} = u^i$$
$$\forall i \quad \frac{d^2y^i}{ds^2} = 0$$

Les équations (163) p. 266 donnent :

$$\begin{aligned} &\forall i \quad \left(\frac{d^2y^i}{ds^2}\right)_M + \left(\Gamma^i{}_{kj}\right)_M \left(\frac{dy^k}{ds}\right)_M \left(\frac{dy^j}{ds}\right)_M = 0 \\ &\forall i \quad \left(\Gamma^i{}_{kj}\right)_M u^k u^j = 0 \end{aligned}$$

Les symboles de Christoffel étant symétriques par rapport aux indices inférieurs, ils ne peuvent s'annuler par soustraction. Par exemple pour k et j variant de 1 à 2 :

$$\begin{aligned} \left(\Gamma^i{}_{11}\right)_M u^1u^1 + \left(\Gamma^i{}_{12}\right)_M u^1u^2 + \left(\Gamma^i{}_{21}\right)_M u^2u^1 + \left(\Gamma^i{}_{22}\right)_M u^2u^2 &= 0 \\ \left(\Gamma^i{}_{11}\right)_M u^1u^1 + \left[\left(\Gamma^i{}_{12}\right)_M + \left(\Gamma^i{}_{21}\right)_M\right] u^1u^2 + \left(\Gamma^i{}_{22}\right)_M u^2u^2 &= 0 \\ \left(\Gamma^i{}_{11}\right)_M u^1u^1 + 2\left(\Gamma^i{}_{12}\right)_M u^1u^2 + \left(\Gamma^i{}_{22}\right)_M u^2u^2 &= 0 \\ \Rightarrow \qquad \left(\Gamma^i{}_{11}\right)_M = \left(\Gamma^i{}_{12}\right)_M = \left(\Gamma^i{}_{22}\right)_M &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\forall i, j, k \quad \left(\Gamma^i{}_{kj}\right)_M = 0$$

dans le système de coordonnées localement géodésiques de centre M. Les relations (117) p. 223 donnent les symboles de Christoffel de première espèce :

$$\begin{aligned} \forall i, j, k \quad \left(\Gamma_{ijk}\right)_M &= g_{jh}\left(\Gamma^h{}_{ik}\right)_M \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les relations (123) p. 224 donnent les dérivées partielles des composantes du tenseur métrique :

$$\begin{aligned} \forall i, j, k \quad \left(\partial_k g_{ij}\right)_M &= \left(\Gamma_{jik}\right)_M + \left(\Gamma_{ijk}\right)_M \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

D'après les équations (164) p. 267 le champ gravitationnel de la physique non relativiste devient la courbure de l'espace-temps en relativité générale. En un point arbitraire de l'espace-temps, le système de coordonnées localement géodésiques permet d'éliminer localement autour de ce point la courbure de l'espace-temps, donc le champ gravitationnel. En physique non relativiste, l'égalité observée entre masse grave et masse inerte (principe d'équivalence entre masse grave et masse inerte) entraine l'égalité locale entre forces d'inertie et force de gravitation : principe d'équivalence locale entre ces forces. Le caractère local de cette équivalence est en accord avec le fait que les lois de la physique sont toutes locales. Le choix toujours possible d'un système de coordonnées localement géodésiques est l'expression du principe d'équivalence en relativité générale. En physique relativiste et non relativiste on parle de système de référence *localement inertiel*, et de *système de coordonnées galiléen*.

23.4.7 Propriétés du tenseur de courbure de première espèce

À partir des relations (177) p. 280, dans le système de coordonnées localement géodésiques le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de première espèce s'écrit :

$$\forall i, j, r, s \quad R_{ij,rs} = \tfrac{1}{2}\left(\partial_{ri}g_{sj} + \partial_{sj}g_{ri} - \partial_{rj}g_{si} - \partial_{si}g_{rj}\right) \tag{180}$$

où les g_{ij} sont les coefficients de l'élément linéaire en coordonnées localement géodésiques.

Remarque 47. *Cette dernière relation n'est valable qu'en coordonnées géodésiques, par exemple en coordonnées cartésiennes dans le plan mais pas en coordonnées polaires dans le plan. De plus elle n'est valable qu'en un point, au centre du système de coordonnées géodésiques. En revanche les propriétés de symétrie du tenseur de courbure sont valables dans tous les systèmes de coordonnées.*

23.4.7.1 Antisymétries et symétrie par blocs

(1) Antisymétrie par rapport aux indices i et j :

$$\forall i, j, r, s \quad R_{ji,rs} = \frac{1}{2}\left(\partial_{rj}g_{si} + \partial_{si}g_{rj} - \partial_{ri}g_{sj} - \partial_{sj}g_{ri}\right)$$

$$\boxed{\forall i, j, r, s \quad R_{ji,rs} = -R_{ij,rs}} \tag{181}$$

(2) Antisymétrie par rapport aux indices r et s :

$$\forall i, j, r, s \quad R_{ij,sr} = \frac{1}{2}\left(\partial_{si}g_{rj} + \partial_{rj}g_{si} - \partial_{sj}g_{ri} - \partial_{ri}g_{sj}\right)$$

$$\boxed{\forall i, j, r, s \quad R_{ij,sr} = -R_{ij,rs}} \tag{182}$$

(3) Symétrique par blocs d'indices ij, et rs :

$$\forall i, j, r, s \quad R_{rs,ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_{ir}g_{js} + \partial_{js}g_{ir} - \partial_{is}g_{jr} - \partial_{jr}g_{is}\right)$$

$$\boxed{\forall i, j, r, s \quad R_{rs,ij} = R_{ij,rs}}$$

23.4.7.2 Premières identités de Bianchi

Le tenseur de courbure est cyclique. Par permutation circulaire sur les indices j, r, s puis addition, nous obtenons les premières identités de Bianchi :

$$\begin{aligned}
\forall i, j, r, s \quad R_{ij,rs} &= \frac{1}{2}\left(\partial_{ri}g_{sj} + \partial_{sj}g_{ri} - \partial_{rj}g_{si} - \partial_{si}g_{rj}\right)\\
\forall i, j, r, s \quad R_{ir,sj} &= \frac{1}{2}\left(\partial_{si}g_{jr} + \partial_{jr}g_{si} - \partial_{sr}g_{ji} - \partial_{ji}g_{sr}\right)\\
\forall i, j, r, s \quad R_{is,jr} &= \frac{1}{2}\left(\partial_{ji}g_{rs} + \partial_{rs}g_{ji} - \partial_{js}g_{ri} - \partial_{ri}g_{js}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i, j, r, s \quad R_{ij,rs} + R_{ir,sj} + R_{is,jr} = 0}$$

23.4.7.3 Composantes indépendantes

Dans un espace à n dimensions, le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel a n^4 composantes. À l'aide de propriétés précédentes, calculons le nombre de composantes indépendantes. Par composante indépendante on entend une composante non nulle qui ne soit pas l'opposée d'une autre composante déjà comptabilisée comme indépendante, ou qui ne soit la somme de deux autres composantes.

(1) Commençons par dénombrer les composantes ayant 4 indices identiques, du type $R_{aa,aa}$ où a est la valeur prise par les indices i, j, r, s. L'antisymétrie par rapport aux indices i et j donne :

$$\begin{aligned}
R_{aa,aa} &= -R_{aa,aa}\\
&= 0
\end{aligned}$$

(2) Les composantes ayant 3 indices identiques sont de 4 types :

$$R_{aa,ab}, R_{aa,ba}, R_{ab,aa}, R_{ba,aa} \qquad \text{avec} \qquad a \neq b$$

La symétrie par blocs puis l'antisymétrie par rapport aux indices i, j ou r, s donnent :

$$\begin{aligned}
R_{aa,ab} &= R_{ab,aa}\\
&= -R_{aa,ab}\\
&= 0
\end{aligned}
\qquad \text{et} \qquad
\begin{aligned}
R_{aa,ba} &= R_{ba,aa}\\
&= -R_{aa,ba}\\
&= 0
\end{aligned}$$

(3) Les composantes ayant exactement 2 fois 2 indices identiques sont de 6 types :

$$R_{aa,bb}, R_{ab,ab}, R_{ba,ab}, R_{ba,ba}, R_{bb,aa}, R_{ab,ba}$$

La condition $a \neq b$ est trop faible et l'on doit poser soit $a < b$ soit $a > b$ pour ne pas tout compter deux fois (si a prend l'ancienne valeur de b, et b prend l'ancienne valeur de a). Cette condition sert au dénombrement et n'a pas de rapport avec les propriétés de symétrie du tenseur de courbure.

On peut aussi écrire que les composantes sont des 3 types suivants

$$R_{aa,bb}, R_{ab,ab}, R_{ab,ba} \qquad \text{avec} \qquad a \neq b$$

La symétrie par blocs puis l'antisymétrie par rapport aux indices i, j ou r, s donnent :

$$\begin{aligned} R_{aa,bb} &= R_{bb,aa} \\ &= -R_{aa,bb} \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} R_{ab,ab} &= -R_{ba,ab} = R_{ba,ba} = -R_{ab,ba} \quad a < b \\ &= -R_{ab,ba} \quad a \neq b \end{aligned}$$

Donc 2 types de composantes nulles et 4 types de composantes non indépendantes. Il ne reste plus qu'à dénombrer les composantes du type $R_{ab,ab}$, ce qui revient à dénombrer ab. Dans un espace de dimension n, l'un des indices prend n valeurs et l'autre $n-1$ valeurs car il est différent du premier ($a \neq b$). Il s'agit de choisir deux nombres différents parmi n où l'ordre des nombres choisis n'intervient pas. Ceci est équivalent à tirer sans remise 2 boules parmi n boules numérotées de 1 à n sans tenir compte de l'ordre. C'est une combinaison :

$$C_n^2 = n(n-1)/2$$

(4) Les composantes ayant exactement 2 indices identiques (autrement dit exactement 3 indices différents) sont de 12 types

$$R_{aa,bc}, R_{aa,cb}, R_{bc,aa}, R_{cb,aa}, R_{ab,ca}, R_{ac,ba}, R_{ba,ac}, R_{ca,ab}, R_{ba,ca}, R_{ca,ba}, R_{ab,ac}, R_{ac,ab}$$

avec $a \neq b$ et $a \neq c$ sinon on serait dans le cas (2). Ici aussi la condition $b \neq c$ est trop faible et l'on doit poser $b < c$ (ou $b > c$) pour ne pas tout compter deux fois. En revanche, a étant présent deux fois, les valeurs de a et de b, et celles de a et de c peuvent s'échanger sans redonner la même composante. Ainsi les conditions $a \neq b$, $a \neq c$ et $b < c$ donnent les trois cas : $a < b < c$, $b < a < c$ et $b < c < a$.

On peut aussi écrire que les composantes sont des 6 types suivants

$$R_{aa,bc}, R_{bc,aa}, R_{ab,ca}, R_{ba,ac}, R_{ba,ca}, R_{ab,ac} \qquad \text{avec} \qquad a \neq b, a \neq c, b \neq c$$

L'antisymétrie par rapport aux indices i, j ou r, s donne :

$$R_{aa,bc} = R_{aa,cb} = R_{bc,aa} = R_{cb,aa} = 0$$

L'antisymétrie et la symétrie par blocs donnent :

$$R_{ab,ac} = -R_{ab,ca} = R_{ba,ca} = -R_{ba,ac} = -R_{ac,ba} = R_{ac,ab} = -R_{ca,ab} = R_{ca,ba}$$

Donc 4 types de composantes nulles et 8 types de composantes non indépendantes. Il ne reste plus qu'à dénombrer $R_{ab,ac}$. Par hypothèse $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$, donc un indice prend n valeurs, l'autre prend $n-1$ valeurs et le dernier prend $n-2$ valeurs. Nous avons trois cas, $a < b < c$, $b < a < c$ et $b < c < a$, pour chaque cas C_n^3 combinaisons :

$$3C_n^3 = n(n-1)(n-2)/2$$

(5) Les composantes ayant leurs 4 indices différents sont de 24 types :

$$R_{ab,cd} = -R_{ab,dc} = R_{ba,dc} = -R_{ba,cd} = -R_{cd,ba} = R_{cd,ab} = -R_{dc,ab} = R_{dc,ba}$$
$$R_{ac,bd} = -R_{ac,db} = R_{ca,db} = -R_{ca,bd} = -R_{bd,ca} = R_{bd,ac} = -R_{db,ac} = R_{db,ac}$$
$$R_{ad,bc} = -R_{ad,cb} = R_{da,cb} = -R_{da,bc} = -R_{bc,da} = R_{bc,ad} = -R_{cb,ad} = R_{cb,da}$$

avec $a < b < c < d$ pour ne pas tout compter plusieurs fois. Nous avons 3 ensembles de 8 types de composantes non indépendantes. Les identités de Bianchi montrent que le dernier ensemble dépend des deux premiers car

$$R_{ab,cd} + R_{ac,bd} = -R_{ad,bc}$$

Il reste deux ensembles de huit types de composantes non indépendantes. Nous dénombrons C_n^4 combinaisons pour les composantes de type $R_{ab,cd}$ et autant pour celles de type $R_{ac,bd}$, soit :

$$2C_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3)/12$$

Au total, dans un espace de dimension n, le nombre de composantes non nulles et indépendantes du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12} &= \frac{n(n-1)}{2}\left[1 + (n-2)\left(1 + \frac{n-3}{6}\right)\right] \\ &= \frac{n(n-1)}{2}\left[1 + \frac{(n-2)(n+3)}{6}\right] \\ &= \left(n^2 - n\right)\left(n^2 + n\right)/12 \\ &= n^2\left(n^2 - 1\right)/12\end{aligned}$$

Exemple 23.4.1. *Dans un espace riemannien à une dimension le tenseur de courbure a* $1^4 = 1$ *composante, dont* $1^2(1^2 - 1)/12 = 0$ *indépendantes. Le tenseur de courbure d'une courbe est nul*

$$R_{11,11} = 0$$

car c'est bien la courbure intrinsèque qui est mesurée.

Exemple 23.4.2. *Dans un espace riemannien à deux dimensions le tenseur de courbure a* $2^4 = 16$ *composantes, dont* $2^2(2^2 - 1)/12 = 1$ *seule indépendante :*

$$R_{12,12} = -R_{12,21} = R_{21,21} = -R_{21,12}$$

Les composantes ont 2 fois 2 indices identiques, et l'on a bien $2(2-1)/2 = 1$.

(1) En coordonnées cartésiennes du plan, autrement dit pour l'élément différentiel

$$ds^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2$$

le tenseur métrique est constant, tous les symboles de Christoffel sont nuls (21.4.6 p. 226). D'après la définition 23.4.2 p. 279 du tenseur de courbure de première espèce, toutes les composantes du tenseur de courbure sont nulles, l'espace est plat.

(2) En coordonnées polaires appliquées au plan, l'élément différentiel (voir (21) *p.* 63*) s'écrit :*

$$ds^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(x^1\right)^2 \left(dx^2\right)^2$$

avec $x^1 = \rho$ *et* $x^2 = \theta$*, où* $g_{11} = 1$ *et* $g_{22} = (x^1)^2$*. Calculons la valeur de la seule composante indépendante potentiellement non nulle grâce aux symboles de Christoffel non nuls donnés dans l'exemple* 21.4.3 *p.* 227 *:*

$$\begin{cases} \Gamma_{212} = \Gamma_{221} = x^1 \\ \Gamma_{122} = -x^1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = 1/x^1 \\ \Gamma^1{}_{22} = -x^1 \end{cases}$$

Avec la définition 23.4.2 *p.* 279 *du tenseur de courbure de première espèce :*

$$\begin{aligned} \forall i,j,r,s \quad R_{ij,rs} &\triangleq \partial_r \Gamma_{ijs} - \partial_s \Gamma_{ijr} + \Gamma^k{}_{jr} \Gamma_{kis} - \Gamma^k{}_{js} \Gamma_{kir} \\ R_{12,12} &= \partial_1 \Gamma_{122} - \partial_2 \Gamma_{121} + \Gamma^k{}_{21} \Gamma_{k12} - \Gamma^k{}_{22} \Gamma_{k11} \\ &= \partial_1 \Gamma_{122} - \partial_2 \Gamma_{121} + \Gamma^1{}_{21} \Gamma_{112} - \Gamma^1{}_{22} \Gamma_{111} + \Gamma^2{}_{21} \Gamma_{212} - \Gamma^2{}_{22} \Gamma_{211} \\ &= \partial_1 \Gamma_{122} + \Gamma^2{}_{21} \Gamma_{122} \\ &= -1 + x^1/x^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le tenseur de courbure est nul et l'espace est plat.

Exemple 23.4.3. *Dans un espace riemannien à trois dimensions le tenseur de courbure a* $3^4 = 81$ *composantes, dont* $3^2(3^2-1)/12 = 6$ *indépendantes.*
$3(3-1)/2 = 3$ *composantes ayant 2 fois 2 indices identiques :*

$$\begin{aligned} R_{12,12} &= -R_{12,21} = R_{21,21} = -R_{21,12} \\ R_{13,13} &= -R_{13,31} = R_{31,31} = -R_{31,13} \\ R_{23,23} &= -R_{23,32} = R_{32,32} = -R_{32,23} \end{aligned}$$

$3(3-1)(3-2)/2 = 3$ *composantes ayant exactement 2 indices identiques :*

$$\begin{aligned} R_{12,13} &= -R_{12,31} = R_{21,31} = -R_{21,13} = -R_{13,21} = R_{13,12} = -R_{31,12} = R_{31,21} \\ R_{21,23} &= -R_{21,32} = R_{12,32} = -R_{12,23} = -R_{23,12} = R_{23,21} = -R_{32,21} = R_{32,12} \\ R_{31,32} &= -R_{31,23} = R_{13,23} = -R_{13,32} = -R_{32,13} = R_{32,31} = -R_{23,31} = R_{23,13} \end{aligned}$$

En coordonnées sphériques dans l'espace euclidien, autrement dit pour l'élément différentiel (voir (22) *p.* 65*)*

$$ds^2 = d\left(x^1\right)^2 + \left(x^1 dx^2\right)^2 + \left(x^1 \sin x^2\right)^2 \left(dx^3\right)^2$$

avec $x^1 = \rho$, $x^2 = \theta$ *et* $x^3 = \phi$*, d'après l'exemple* 21.4.4 *p.* 228 *les symboles de Christoffel non nuls sont les suivants :*

$$\begin{cases} \Gamma_{221} = \Gamma_{212} = x^1 \\ \Gamma_{331} = \Gamma_{313} = x^1 \sin^2 x^2 \\ \Gamma_{332} = \Gamma_{323} = \left(x^1\right)^2 \sin x^2 \cos x^2 \\ \Gamma_{122} = -x^1 \\ \Gamma_{133} = -x^1 \sin^2 x^2 \\ \Gamma_{233} = -\left(x^1\right)^2 \sin x^2 \cos x^2 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \Gamma^2{}_{21} = \Gamma^2{}_{12} = 1/x^1 \\ \Gamma^3{}_{31} = \Gamma^3{}_{13} = 1/x^1 \\ \Gamma^3{}_{32} = \Gamma^3{}_{23} = \cot x^2 \\ \Gamma^1{}_{22} = -x^1 \\ \Gamma^1{}_{33} = -x^1 \sin^2 x^2 \\ \Gamma^2{}_{33} = -\sin x^2 \cos x^2 \end{cases}$$

Avec la définition 23.4.2 p. 279 du tenseur de courbure de première espèce :

$$\begin{aligned} R_{12,12} &= \partial_1 \Gamma_{122} - \partial_2 \Gamma_{121} + \Gamma^1{}_{21} \Gamma_{112} - \Gamma^1{}_{22} \Gamma_{111} + \Gamma^2{}_{21} \Gamma_{212} - \Gamma^2{}_{22} \Gamma_{211} \\ &= \partial_1 \Gamma_{122} + \Gamma^2{}_{21} \Gamma_{212} = -1 + x^1/x^1 = 0 \\ R_{13,13} &= \partial_1 \Gamma_{133} - \partial_3 \Gamma_{131} + \Gamma^1{}_{31} \Gamma_{113} - \Gamma^1{}_{33} \Gamma_{111} + \Gamma^3{}_{31} \Gamma_{313} - \Gamma^3{}_{33} \Gamma_{311} \\ &= \partial_1 \Gamma_{133} + \Gamma^3{}_{31} \Gamma_{313} = -\sin^2 x^2 + x^1 \sin^2 x^2/x^1 = 0 \\ R_{23,23} &= \partial_2 \Gamma_{233} - \partial_3 \Gamma_{232} + \Gamma^2{}_{32} \Gamma_{223} - \Gamma^2{}_{33} \Gamma_{222} + \Gamma^3{}_{32} \Gamma_{323} - \Gamma^3{}_{33} \Gamma_{322} \\ &= \partial_2 \Gamma_{233} + \Gamma^3{}_{32} \Gamma_{323} = -\left(x^1\right)^2 \cos^2 x^2 + \cot x^2 \left(x^1\right)^2 \sin x^2 \cos x^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\forall i,j,r,s \quad R_{ij,rs} \triangleq \partial_r \Gamma_{ijs} - \partial_s \Gamma_{ijr} + \Gamma^k{}_{jr} \Gamma_{kis} - \Gamma^k{}_{js} \Gamma_{kir}$$

$$\begin{aligned} R_{12,13} &= \partial_1 \Gamma_{123} - \partial_3 \Gamma_{121} + \Gamma^k{}_{21} \Gamma_{k13} - \Gamma^k{}_{23} \Gamma_{k11} \\ &= \partial_1 \Gamma_{123} - \partial_3 \Gamma_{121} + \Gamma^1{}_{21} \Gamma_{113} - \Gamma^1{}_{23} \Gamma_{111} + \Gamma^2{}_{21} \Gamma_{213} - \Gamma^2{}_{23} \Gamma_{211} \\ &\qquad + \Gamma^3{}_{21} \Gamma_{313} - \Gamma^3{}_{23} \Gamma_{311} = 0 \\ R_{21,23} &= \partial_2 \Gamma_{213} - \partial_3 \Gamma_{212} + \Gamma^k{}_{12} \Gamma_{k23} - \Gamma^k{}_{13} \Gamma_{k22} \\ &= \partial_2 \Gamma_{213} - \partial_3 \Gamma_{212} + \Gamma^1{}_{12} \Gamma_{123} - \Gamma^1{}_{13} \Gamma_{122} + \Gamma^2{}_{12} \Gamma_{223} - \Gamma^2{}_{13} \Gamma_{222} \\ &\qquad + \Gamma^3{}_{12} \Gamma_{323} - \Gamma^3{}_{13} \Gamma_{322} = 0 \\ R_{31,32} &= \partial_3 \Gamma_{312} - \partial_2 \Gamma_{313} + \Gamma^k{}_{13} \Gamma_{k32} - \Gamma^k{}_{12} \Gamma_{k33} \\ &= \partial_3 \Gamma_{312} - \partial_2 \Gamma_{313} + \Gamma^1{}_{13} \Gamma_{132} - \Gamma^1{}_{12} \Gamma_{133} + \Gamma^2{}_{13} \Gamma_{232} - \Gamma^2{}_{12} \Gamma_{233} \\ &\qquad + \Gamma^3{}_{13} \Gamma_{332} - \Gamma^3{}_{12} \Gamma_{333} \\ &= -\partial_2 \Gamma_{313} - \Gamma^2{}_{12} \Gamma_{233} + \Gamma^3{}_{13} \Gamma_{332} \\ &= -2x^1 \sin x^2 \cos x^2 + x^1 \sin x^2 \cos x^2 + x^1 \sin x^2 \cos x^2 = 0 \end{aligned}$$

Le tenseur de courbure est nul et l'espace est plat.

EXEMPLE 23.4.4. *Dans un espace riemannien à quatre dimensions le tenseur de courbure a* $4^4 = 256$ *composantes, dont* $4^2(4^2-1)/12 = 20$ *indépendantes.*

$4(4-1)/2 = 6$ *composantes ayant 2 fois 2 indices identiques :*

$$\begin{aligned}
R_{12,12} &= -R_{12,21} = R_{21,21} = -R_{21,12} \\
R_{13,13} &= -R_{13,31} = R_{31,31} = -R_{31,13} \\
R_{14,14} &= -R_{14,41} = R_{41,41} = -R_{41,14} \\
R_{23,23} &= -R_{23,32} = R_{32,32} = -R_{32,23} \\
R_{24,24} &= -R_{24,42} = R_{42,42} = -R_{42,24} \\
R_{34,34} &= -R_{34,43} = R_{43,43} = -R_{43,34}
\end{aligned}$$

$4(4-1)(4-2)/2 = 12$ *composantes ayant exactement 2 indices identiques :*

$$\begin{aligned}
R_{12,13} &= -R_{12,31} = R_{21,31} = -R_{21,13} = -R_{13,21} = R_{13,12} = -R_{31,12} = R_{31,21} \\
R_{12,14} &= -R_{12,41} = R_{21,41} = -R_{21,14} = -R_{14,21} = R_{14,12} = -R_{41,12} = R_{41,21} \\
R_{13,14} &= -R_{13,41} = R_{31,41} = -R_{31,14} = -R_{14,31} = R_{14,13} = -R_{41,13} = R_{41,31} \\
R_{21,23} &= -R_{21,32} = R_{12,32} = -R_{12,23} = -R_{23,12} = R_{23,21} = -R_{32,21} = R_{32,12} \\
R_{21,24} &= -R_{21,42} = R_{12,42} = -R_{12,24} = -R_{24,12} = R_{24,21} = -R_{42,21} = R_{42,12} \\
R_{23,24} &= -R_{23,42} = R_{32,42} = -R_{32,24} = -R_{24,32} = R_{24,23} = -R_{42,23} = R_{42,32} \\
R_{31,32} &= -R_{31,23} = R_{13,23} = -R_{13,32} = -R_{32,13} = R_{32,31} = -R_{23,31} = R_{23,13} \\
R_{31,34} &= -R_{31,43} = R_{13,43} = -R_{13,34} = -R_{34,13} = R_{34,31} = -R_{43,31} = R_{43,13} \\
R_{32,34} &= -R_{32,43} = R_{23,43} = -R_{23,34} = -R_{34,23} = R_{34,32} = -R_{43,32} = R_{43,32} \\
R_{41,42} &= -R_{41,24} = R_{14,24} = -R_{14,42} = -R_{42,14} = R_{42,41} = -R_{24,41} = R_{24,14} \\
R_{41,43} &= -R_{41,34} = R_{14,34} = -R_{14,43} = -R_{43,14} = R_{43,41} = -R_{34,41} = R_{34,14} \\
R_{42,43} &= -R_{42,34} = R_{24,34} = -R_{24,43} = -R_{43,24} = R_{43,42} = -R_{34,42} = R_{34,24}
\end{aligned}$$

$4(4-1)(4-2)(4-3)/12 = 2$ *composantes ayant 4 indices différents :*

$$\begin{aligned}
R_{12,34} &= -R_{12,43} = R_{21,43} = -R_{21,34} = -R_{34,21} = R_{34,12} = -R_{43,12} = R_{43,21} \\
R_{13,24} &= -R_{13,42} = R_{31,42} = -R_{31,24} = -R_{24,31} = R_{24,13} = -R_{42,13} = R_{42,13}
\end{aligned}$$

23.4.8 Dérivées covariantes secondes d'un vecteur

Soit un champ de vecteurs de composantes contravariantes v^h, cherchons la différence entre $\nabla_r\left(\nabla_s v^h\right)$ et $\nabla_s\left(\nabla_r v^h\right)$. Reprenons les relations (149) p. 246, $\forall h, r, s$

$$\begin{aligned}
\nabla_r\left(\nabla_s v^h\right) &= \partial_{rs} v^h + v^i \partial_r \Gamma^h{}_{is} + \Gamma^h{}_{is}\,\partial_r v^i - \Gamma^k{}_{sr}\,\partial_k v^h - v^i\,\Gamma^h{}_{ik}\,\Gamma^k{}_{sr} + \Gamma^h{}_{kr}\,\partial_s v^k + v^i\,\Gamma^k{}_{is}\,\Gamma^h{}_{kr} \\
\nabla_s\left(\nabla_r v^h\right) &= \partial_{sr} v^h + v^i \partial_s \Gamma^h{}_{ir} + \Gamma^h{}_{ir}\,\partial_s v^i - \Gamma^k{}_{rs}\,\partial_k v^h - v^i\,\Gamma^h{}_{ik}\,\Gamma^k{}_{rs} + \Gamma^h{}_{ks}\,\partial_r v^k + v^i\,\Gamma^k{}_{ir}\,\Gamma^h{}_{ks}
\end{aligned}$$

si bien que $\forall h, r, s$:

$$\begin{aligned}
&\nabla_r\left(\nabla_s v^h\right) - \nabla_s\left(\nabla_r v^h\right) \\
&= v^i \partial_r \Gamma^h{}_{is} - v^i \partial_s \Gamma^h{}_{ir} + \Gamma^h{}_{is}\,\partial_r v^i - \Gamma^h{}_{ir}\,\partial_s v^i + \Gamma^h{}_{kr}\,\partial_s v^k - \Gamma^h{}_{ks}\,\partial_r v^k + v^i\,\Gamma^k{}_{is}\,\Gamma^h{}_{kr} - v^i\,\Gamma^k{}_{ir}\,\Gamma^h{}_{ks} \\
&= v^i\left(\partial_r \Gamma^h{}_{is} - \partial_s \Gamma^h{}_{ir}\right) + \Gamma^h{}_{is}\,\partial_r v^i - \Gamma^h{}_{ir}\,\partial_s v^i + \Gamma^h{}_{ir}\,\partial_s v^i - \Gamma^h{}_{is}\,\partial_r v^i + v^i\left(\Gamma^k{}_{is}\,\Gamma^h{}_{kr} - \Gamma^k{}_{ir}\,\Gamma^h{}_{ks}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit qu'au point M :

$$\forall h, r, s \quad \nabla_r\left(\nabla_s v^h\right) - \nabla_s\left(\nabla_r v^h\right) = v^i\left(\partial_r \Gamma^h{}_{is} - \partial_s \Gamma^h{}_{ir} + \Gamma^k{}_{is}\,\Gamma^h{}_{kr} - \Gamma^k{}_{ir}\,\Gamma^h{}_{ks}\right)$$

On reconnait la définition 23.4.1 p. 279 du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel de seconde espèce :

$$\forall h, r, s \quad \nabla_r \left(\nabla_s v^h\right) - \nabla_s \left(\nabla_r v^h\right) = v^i R^h{}_{i,rs}$$

Dans un espace courbe, les dérivées covariantes secondes d'un vecteur, et plus généralement d'un tenseur, dépendent de l'ordre des dérivations (ce qui n'a pas lieu pour les dérivées ordinaires).

23.4.9 Tenseur de courbure de Ricci

Nous verrons au paragraphe 26.9 p. 347 que pour établir les équations de la relativité générale nous devons trouver un tenseur chronogéométrique (lié uniquement à la courbure de l'espace-temps) symétrique d'ordre deux.

Effectuons toutes les contractions possibles du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel. En utilisant les symétries du tenseur de courbure du paragraphe 23.4.7 p. 282 :

$$\begin{aligned} R_{ij,rs} &= -R_{ji,rs} = R_{ji,sr} = -R_{ij,sr} = R_{rs,ij} = -R_{sr,ij} = R_{sr,ji} = R_{rs,ji} \\ g^{ij} R_{ij,rs} &= -g^{ij} R_{ji,rs} = g^{ij} R_{ji,sr} = -g^{ij} R_{ij,sr} = g^{ij} R_{rs,ij} = -g^{ij} R_{sr,ij} = g^{ij} R_{sr,ji} = g^{ij} R_{rs,ji} \\ R_{rs} &= -R_{rs} = R_{sr} = -R_{sr} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{rs} R_{ij,rs} &= g^{ij} R_{rs,ij} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{ir} R_{ij,rs} &= -g^{ir} R_{ji,rs} = g^{ir} R_{ji,sr} = -g^{ir} R_{ij,sr} = g^{ir} R_{rs,ij} = -g^{ir} R_{sr,ij} = g^{ir} R_{sr,ji} = g^{ir} R_{rs,ji} \\ R_{js} &= -R_{js} = R_{sj} = -R_{sj} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{js} R_{ij,rs} &= g^{ir} R_{ji,sr} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{is} R_{ij,rs} &= -g^{is} R_{ji,rs} = g^{is} R_{ji,sr} = -g^{is} R_{ij,sr} = g^{is} R_{rs,ij} = -g^{is} R_{sr,ij} = g^{is} R_{sr,ji} = g^{is} R_{rs,ji} \\ R_{jr} &= R_{rj} \\ g^{jr} R_{ij,rs} &= g^{is} R_{ji,sr} \\ R_i{}^r{}_{,rs} &= R_j{}^s{}_{,sr} \\ R_{is} &= R_{jr} \end{aligned}$$

Par contraction du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel, nous ne pouvons donc former qu'un seul tenseur, le tenseur symétrique d'ordre deux R_{is}, qui s'écrit également R_{jr}.

DÉFINITION 23.4.4. *Tenseur de courbure de Ricci*
Le tenseur symétrique d'ordre deux

$$\begin{aligned} \forall i, s \quad R_{is} &\triangleq g^{jr} R_{ij,rs} \\ &= R_i{}^r{}_{,rs} \\ &= \partial_r \Gamma^r{}_{si} - \partial_s \Gamma^r{}_{ri} + \Gamma^k{}_{si} \Gamma^r{}_{rk} - \Gamma^k{}_{ri} \Gamma^r{}_{sk} \end{aligned}$$

est appelé tenseur de courbure de Ricci de l'espace riemannien R_n.

Montrons que ce tenseur est symétrique en montrant que chacun de ses termes est symétrique :

$$\begin{aligned}
\partial_r \Gamma^r{}_{si} &= \partial_r \Gamma^r{}_{is} \\
\Gamma^k{}_{si}\,\Gamma^r{}_{rk} &= \Gamma^k{}_{is}\,\Gamma^r{}_{rk} \\
\Gamma^k{}_{ri}\,\Gamma^r{}_{sk} &= \Gamma^k{}_{rs}\,\Gamma^r{}_{ik} \\
\partial_s \Gamma^r{}_{ri} &= \partial_s \left(\tfrac{1}{2g}\,\partial_i g\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\partial_s(\partial_i \ln|g|) \\
&= \tfrac{1}{2}\partial_i(\partial_s \ln|g|) \\
&= \partial_i \Gamma^r{}_{rs}
\end{aligned}$$

Exemple 23.4.5. *Tenseur de Ricci dans les espaces pré-euclidiens*
D'après le paragraphe 21.4.6 p. 226, dans les espaces pré-euclidiens les symboles de Christoffel sont nuls. Par conséquent le tenseur de Ricci est également nul. Par exemple dans l'espace-temps pseudo-euclidien de la relativité restreinte :

$$\forall \mu,\nu \quad R_{\mu\nu} = 0$$

Exemple 23.4.6. *Tenseur de Ricci d'une sphère*
En se servant de l'exemple 21.4.5 p. 229 :

$$\begin{aligned}
R_{\theta\theta} &= \partial_r \Gamma^r{}_{\theta\theta} - \partial_\theta \Gamma^r{}_{r\theta} + \Gamma^k{}_{\theta\theta}\,\Gamma^r{}_{rk} - \Gamma^k{}_{r\theta}\,\Gamma^r{}_{\theta k} \\
&= -\partial_\theta \Gamma^\phi{}_{\phi\theta} - \Gamma^\phi{}_{\phi\theta}\,\Gamma^\phi{}_{\theta\phi} \\
&= 1 + \cot^2(\theta) - \cot^2(\theta) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi\phi} &= \partial_r \Gamma^r{}_{\phi\phi} - \partial_\phi \Gamma^r{}_{r\phi} + \Gamma^k{}_{\phi\phi}\,\Gamma^r{}_{rk} - \Gamma^k{}_{r\phi}\,\Gamma^r{}_{\phi k} \\
&= \partial_\theta \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} + \Gamma^\theta{}_{\phi\phi}\,\Gamma^r{}_{r\theta} - \Gamma^\phi{}_{r\phi}\,\Gamma^r{}_{\phi\phi} - \Gamma^\theta{}_{r\phi}\,\Gamma^r{}_{\phi\theta} \\
&= \partial_\theta \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} + \Gamma^\theta{}_{\phi\phi}\left(\Gamma^\theta{}_{\theta\theta} + \Gamma^\phi{}_{\phi\theta}\right) - \Gamma^\phi{}_{\theta\phi}\,\Gamma^\theta{}_{\phi\phi} - \Gamma^\phi{}_{\phi\phi}\,\Gamma^\phi{}_{\phi\phi} - \Gamma^\theta{}_{\theta\phi}\,\Gamma^\theta{}_{\phi\theta} - \Gamma^\theta{}_{\phi\phi}\,\Gamma^\phi{}_{\phi\theta} \\
&= \partial_\theta \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} + \Gamma^\theta{}_{\phi\phi}\Gamma^\phi{}_{\phi\theta} - \Gamma^\phi{}_{\theta\phi}\,\Gamma^\theta{}_{\phi\phi} - \Gamma^\theta{}_{\phi\phi}\,\Gamma^\phi{}_{\phi\theta} \\
&= \partial_\theta \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} - \Gamma^\phi{}_{\theta\phi}\,\Gamma^\theta{}_{\phi\phi} \\
&= \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta) + \cos^2(\theta) \\
&= \sin^2(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\theta\phi} &= \partial_r \Gamma^r{}_{\theta\phi} - \partial_\theta \Gamma^r{}_{r\phi} + \Gamma^k{}_{\theta\phi}\,\Gamma^r{}_{rk} - \Gamma^k{}_{r\phi}\,\Gamma^r{}_{\theta k} \\
&= \partial_\theta \Gamma^\theta{}_{\theta\phi} - \partial_\theta \Gamma^\theta{}_{\theta\phi} + \Gamma^\phi{}_{\theta\phi}\,\Gamma^r{}_{r\phi} - \Gamma^\phi{}_{r\phi}\,\Gamma^r{}_{\theta\phi} \\
&= \partial_\theta \Gamma^\theta{}_{\theta\phi} - \partial_\theta \Gamma^\theta{}_{\theta\phi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Exemple 23.4.7. *Tenseur de Ricci pour la métrique de Schwarzschild*
Grâce aux symboles de Christoffel, exercice 21.4.6 p. 229, calculons la composante R_{00} :

$$R_{00} = \partial_r \Gamma^r{}_{00} - \partial_0 \Gamma^r{}_{r0} + \Gamma^k{}_{00}\,\Gamma^r{}_{rk} - \Gamma^k{}_{r0}\,\Gamma^r{}_{0k}$$

$$\begin{aligned}
\partial_r \Gamma^r{}_{00} &= \partial_0 \Gamma^0{}_{00} + \partial_1 \Gamma^1{}_{00} + \partial_2 \Gamma^2{}_{00} + \partial_3 \Gamma^3{}_{00} \\
&= \partial_0 \Gamma^0{}_{00} + \partial_1 \Gamma^1{}_{00} \\
&= \tfrac{1}{2}\partial_{ct}\dot{\alpha} + \tfrac{1}{2}\partial_r\left(\alpha' e^{\alpha-\beta}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\ddot{\alpha} + \left(\tfrac{1}{2}\alpha'' + \tfrac{1}{2}\alpha'^2 - \tfrac{1}{2}\alpha'\beta'\right)e^{\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_0 \Gamma^r{}_{r0} &= \partial_0 \Gamma^0{}_{00} + \partial_0 \Gamma^1{}_{10} + \partial_0 \Gamma^2{}_{20} + \partial_0 \Gamma^3{}_{30} \\
&= \tfrac{1}{2}\partial_{ct}\dot{\alpha} + \tfrac{1}{2}\partial_r\dot{\beta} \\
&= \tfrac{1}{2}\ddot{\alpha} + \tfrac{1}{2}\ddot{\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^k{}_{00}\,\Gamma^r{}_{rk} &= \Gamma^0{}_{00}\,\Gamma^r{}_{r0} + \Gamma^1{}_{00}\,\Gamma^r{}_{r1} + \Gamma^2{}_{00}\,\Gamma^r{}_{r2} + \Gamma^3{}_{00}\,\Gamma^r{}_{r3} \\
&= \Gamma^0{}_{00}\,\Gamma^r{}_{r0} + \Gamma^1{}_{00}\,\Gamma^r{}_{r1} \\
&= \Gamma^0{}_{00}\left(\Gamma^0{}_{00} + \Gamma^1{}_{10} + \Gamma^2{}_{20} + \Gamma^3{}_{30}\right) + \Gamma^1{}_{00}\left(\Gamma^0{}_{01} + \Gamma^1{}_{11} + \Gamma^2{}_{21} + \Gamma^3{}_{31}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\dot{\alpha}\left(\tfrac{1}{2}\dot{\alpha} + \tfrac{1}{2}\dot{\beta}\right) + \tfrac{1}{2}\alpha' e^{\alpha-\beta}\left(\tfrac{1}{2}\alpha' + \tfrac{1}{2}\beta' + \tfrac{1}{r} + \tfrac{1}{r}\right) \\
&= \tfrac{1}{4}\dot{\alpha}^2 + \tfrac{1}{4}\dot{\alpha}\dot{\beta} + \left(\tfrac{1}{4}\alpha'^2 + \tfrac{1}{4}\alpha'\beta' + \tfrac{1}{r}\alpha'\right)e^{\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^k{}_{r0}\,\Gamma^r{}_{0k} &= \Gamma^0{}_{r0}\,\Gamma^r{}_{00} + \Gamma^1{}_{r0}\,\Gamma^r{}_{01} + \Gamma^2{}_{r0}\,\Gamma^r{}_{02} + \Gamma^3{}_{r0}\,\Gamma^r{}_{03} \\
&= \Gamma^0{}_{r0}\,\Gamma^r{}_{00} + \Gamma^1{}_{r0}\,\Gamma^r{}_{01} \\
&= \Gamma^0{}_{00}\Gamma^0{}_{00} + \Gamma^0{}_{10}\Gamma^1{}_{00} + \Gamma^0{}_{20}\Gamma^2{}_{00} + \Gamma^0{}_{30}\Gamma^3{}_{00} \\
&\qquad + \Gamma^1{}_{00}\Gamma^0{}_{01} + \Gamma^1{}_{10}\Gamma^1{}_{01} + \Gamma^1{}_{20}\Gamma^2{}_{01} + \Gamma^1{}_{30}\Gamma^3{}_{01} \\
&= \Gamma^0{}_{00}\,\Gamma^0{}_{00} + \Gamma^0{}_{10}\,\Gamma^1{}_{00} + \Gamma^1{}_{00}\Gamma^0{}_{01} + \Gamma^1{}_{10}\Gamma^1{}_{01} \\
&= \tfrac{1}{4}\dot{\alpha}^2 + \tfrac{1}{4}\alpha'^2 e^{\alpha-\beta} + \tfrac{1}{4}\alpha'^2 e^{\alpha-\beta} + \tfrac{1}{4}\dot{\beta}^2 \\
&= \tfrac{1}{4}\dot{\alpha}^2 + \tfrac{1}{4}\dot{\beta}^2 + \tfrac{1}{2}\alpha'^2 e^{\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \tfrac{1}{2}\ddot{\alpha} + \left(\tfrac{1}{2}\alpha'' + \tfrac{1}{2}\alpha'^2 - \tfrac{1}{2}\alpha'\beta'\right)e^{\alpha-\beta} - \tfrac{1}{2}\ddot{\alpha} - \tfrac{1}{2}\ddot{\beta} \\
&\qquad + \tfrac{1}{4}\dot{\alpha}^2 + \tfrac{1}{4}\dot{\alpha}\dot{\beta} + \left(\tfrac{1}{4}\alpha'^2 + \tfrac{1}{4}\alpha'\beta' + \tfrac{1}{r}\alpha'\right)e^{\alpha-\beta} \\
&\qquad\qquad - \tfrac{1}{4}\dot{\alpha}^2 - \tfrac{1}{4}\dot{\beta}^2 - \tfrac{1}{2}\alpha'^2 e^{\alpha-\beta} \\
&= -\tfrac{1}{2}\ddot{\beta} + \tfrac{1}{4}\dot{\alpha}\dot{\beta} - \tfrac{1}{4}\dot{\beta}^2 + \left(\tfrac{1}{2}\alpha'' + \tfrac{1}{4}\alpha'^2 - \tfrac{1}{4}\alpha'\beta' + \tfrac{1}{r}\alpha'\right)e^{\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

Calculons la composante R_{10} :

$$R_{10} = \partial_r \Gamma^r{}_{01} - \partial_0 \Gamma^r{}_{r1} + \Gamma^k{}_{01}\,\Gamma^r{}_{rk} - \Gamma^k{}_{r1}\,\Gamma^r{}_{0k}$$

$$\begin{aligned}
\partial_r \Gamma^r{}_{01} &= \partial_0 \Gamma^0{}_{01} + \partial_1 \Gamma^1{}_{01} + \partial_2 \Gamma^2{}_{01} + \partial_3 \Gamma^3{}_{01} \\
&= \partial_0 \Gamma^0{}_{01} + \partial_1 \Gamma^1{}_{01} \\
&= \tfrac{1}{2}\partial_{ct}\alpha' + \tfrac{1}{2}\partial_r\dot{\beta} \\
&= \tfrac{1}{2}\dot{\alpha}' + \tfrac{1}{2}\dot{\beta}'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_0 {\Gamma^r}_{r1} &= \partial_0 {\Gamma^0}_{01} + \partial_0 {\Gamma^1}_{11} + \partial_0 {\Gamma^2}_{21} + \partial_0 {\Gamma^3}_{31} \\
&= \tfrac{1}{2}\partial_{ct}\alpha' + \tfrac{1}{2}\partial_{ct}\beta' + \partial_{ct}\tfrac{1}{r} + \partial_{ct}\tfrac{1}{r} \\
&= \tfrac{1}{2}\dot{\alpha}' + \tfrac{1}{2}\dot{\beta}'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{\Gamma^k}_{01}\,{\Gamma^r}_{rk} &= {\Gamma^0}_{01}\,{\Gamma^r}_{r0} + {\Gamma^1}_{01}\,{\Gamma^r}_{r1} + {\Gamma^2}_{01}\,{\Gamma^r}_{r2} + {\Gamma^3}_{01}\,{\Gamma^r}_{r3} \\
&= {\Gamma^0}_{01}\,{\Gamma^r}_{r0} + {\Gamma^1}_{01}\,{\Gamma^r}_{r1} \\
&= {\Gamma^0}_{01}\left({\Gamma^0}_{00} + {\Gamma^1}_{10} + {\Gamma^2}_{20} + {\Gamma^3}_{30}\right) + {\Gamma^1}_{01}\left({\Gamma^0}_{01} + {\Gamma^1}_{11} + {\Gamma^2}_{21} + {\Gamma^3}_{31}\right) \\
&= {\Gamma^0}_{01}{\Gamma^0}_{00} + {\Gamma^0}_{01}{\Gamma^1}_{10} + {\Gamma^1}_{01}{\Gamma^0}_{01} + {\Gamma^1}_{01}{\Gamma^1}_{11} + {\Gamma^1}_{01}{\Gamma^2}_{21} + {\Gamma^1}_{01}{\Gamma^3}_{31} \\
&= \tfrac{1}{4}\alpha'\dot{\alpha} + \tfrac{1}{4}\alpha'\dot{\beta} + \tfrac{1}{4}\alpha'\dot{\beta} + \tfrac{1}{4}\dot{\beta}\beta' + \tfrac{1}{r}\dot{\beta} \\
&= \tfrac{1}{4}\alpha'\dot{\alpha} + \tfrac{1}{2}\alpha'\dot{\beta} + \tfrac{1}{4}\dot{\beta}\beta' + \tfrac{1}{r}\dot{\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{\Gamma^k}_{r1}\,{\Gamma^r}_{0k} &= {\Gamma^0}_{r1}\,{\Gamma^r}_{00} + {\Gamma^1}_{r1}\,{\Gamma^r}_{01} + {\Gamma^2}_{r1}\,{\Gamma^r}_{02} + {\Gamma^3}_{r1}\,{\Gamma^r}_{03} \\
&= {\Gamma^0}_{r1}\,{\Gamma^r}_{00} + {\Gamma^1}_{r1}\,{\Gamma^r}_{01} \\
&= {\Gamma^0}_{01}{\Gamma^0}_{00} + {\Gamma^0}_{11}{\Gamma^1}_{00} + {\Gamma^0}_{21}{\Gamma^2}_{00} + {\Gamma^0}_{31}{\Gamma^3}_{00} \\
&\qquad + {\Gamma^1}_{01}\,{\Gamma^0}_{01} + {\Gamma^1}_{11}\,{\Gamma^1}_{01} + {\Gamma^1}_{21}\,{\Gamma^2}_{01} + {\Gamma^1}_{31}\,{\Gamma^3}_{01} \\
&= {\Gamma^0}_{01}{\Gamma^0}_{00} + {\Gamma^0}_{11}{\Gamma^1}_{00} + {\Gamma^1}_{01}\,{\Gamma^0}_{01} + {\Gamma^1}_{11}\,{\Gamma^1}_{01} \\
&= \tfrac{1}{4}\alpha'\dot{\alpha} + \tfrac{1}{4}\alpha'\dot{\beta} + \tfrac{1}{4}\alpha'\dot{\beta} + \tfrac{1}{4}\dot{\beta}\beta' \\
&= \tfrac{1}{4}\alpha'\dot{\alpha} + \tfrac{1}{2}\alpha'\dot{\beta} + \tfrac{1}{4}\dot{\beta}\beta'
\end{aligned}$$

$$R_{10} = \tfrac{\dot{\beta}}{r}$$

Calculons la composante R_{11} :

$$R_{11} = \partial_r {\Gamma^r}_{11} - \partial_1 {\Gamma^r}_{r1} + {\Gamma^k}_{11}\,{\Gamma^r}_{rk} - {\Gamma^k}_{r1}\,{\Gamma^r}_{1k}$$

$$\begin{aligned}
\partial_r {\Gamma^r}_{11} &= \partial_0 {\Gamma^0}_{11} + \partial_1 {\Gamma^1}_{11} + \partial_2 {\Gamma^2}_{11} + \partial_3 {\Gamma^3}_{11} \\
&= \partial_0 {\Gamma^0}_{11} + \partial_1 {\Gamma^1}_{11} \\
&= \tfrac{1}{2}\partial_{ct}\left(\dot{\beta}e^{\beta-\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}\partial_r\beta' \\
&= \tfrac{1}{2}\beta'' + \left(\tfrac{1}{2}\ddot{\beta} + \tfrac{1}{2}\dot{\beta}^2 - \dot{\beta}\dot{\alpha}\right)e^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_1 {\Gamma^r}_{r1} &= \partial_1 {\Gamma^0}_{01} + \partial_1 {\Gamma^1}_{11} + \partial_1 {\Gamma^2}_{21} + \partial_1 {\Gamma^3}_{31} \\
&= \tfrac{1}{2}\partial_r\alpha' + \tfrac{1}{2}\partial_r\beta' + \partial_r\tfrac{1}{r} + \partial_r\tfrac{1}{r} \\
&= \tfrac{1}{2}\alpha'' + \tfrac{1}{2}\beta'' - \tfrac{2}{r^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{\Gamma^k}_{11}\,{\Gamma^r}_{rk} &= {\Gamma^0}_{11}\,{\Gamma^r}_{r0} + {\Gamma^1}_{11}\,{\Gamma^r}_{r1} + {\Gamma^2}_{11}\,{\Gamma^r}_{r2} + {\Gamma^3}_{11}\,{\Gamma^r}_{r3} \\
&= {\Gamma^0}_{11}\,{\Gamma^r}_{r0} + {\Gamma^1}_{11}\,{\Gamma^r}_{r1} \\
&= {\Gamma^0}_{11}\left({\Gamma^0}_{00} + {\Gamma^1}_{10} + {\Gamma^2}_{20} + {\Gamma^3}_{30}\right) + {\Gamma^1}_{11}\left({\Gamma^0}_{01} + {\Gamma^1}_{11} + {\Gamma^2}_{21} + {\Gamma^3}_{31}\right) \\
&= {\Gamma^0}_{11}{\Gamma^0}_{00} + {\Gamma^0}_{11}{\Gamma^1}_{10} + {\Gamma^1}_{11}{\Gamma^0}_{01} + {\Gamma^1}_{11}{\Gamma^1}_{11} + {\Gamma^1}_{11}{\Gamma^2}_{21} + {\Gamma^1}_{11}{\Gamma^3}_{31} \\
&= \tfrac{1}{4}\dot{\beta}\dot{\alpha}e^{\beta-\alpha} + \tfrac{1}{4}\dot{\beta}^2e^{\beta-\alpha} + \tfrac{1}{4}\beta'\alpha' + \tfrac{1}{4}\beta'^2 + \tfrac{1}{2r}\beta' + \tfrac{1}{2r}\beta' \\
&= \tfrac{1}{4}\beta'\alpha' + \tfrac{1}{4}\beta'^2 + \tfrac{1}{r}\beta' + \left(\tfrac{1}{4}\dot{\beta}\dot{\alpha} + \tfrac{1}{4}\dot{\beta}^2\right)e^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{\Gamma^k}_{r1}{\Gamma^r}_{1k} &= {\Gamma^0}_{r1}{\Gamma^r}_{10} + {\Gamma^1}_{r1}{\Gamma^r}_{11} + {\Gamma^2}_{r1}{\Gamma^r}_{12} + {\Gamma^3}_{r1}{\Gamma^r}_{13} \\
&= {\Gamma^0}_{01}{\Gamma^0}_{10} + {\Gamma^0}_{11}{\Gamma^1}_{10} + {\Gamma^0}_{21}{\Gamma^2}_{10} + {\Gamma^0}_{31}{\Gamma^3}_{10} \\
&\quad + {\Gamma^1}_{01}{\Gamma^0}_{11} + {\Gamma^1}_{11}{\Gamma^1}_{11} + {\Gamma^1}_{21}{\Gamma^2}_{11} + {\Gamma^1}_{31}{\Gamma^3}_{11} \\
&\qquad + {\Gamma^2}_{01}{\Gamma^0}_{12} + {\Gamma^2}_{11}{\Gamma^1}_{12} + {\Gamma^2}_{21}{\Gamma^2}_{12} + {\Gamma^2}_{31}{\Gamma^3}_{12} \\
&\qquad\quad + {\Gamma^3}_{01}{\Gamma^0}_{13} + {\Gamma^3}_{11}{\Gamma^1}_{13} + {\Gamma^3}_{21}{\Gamma^2}_{13} + {\Gamma^3}_{31}{\Gamma^3}_{13} \\
&= {\Gamma^0}_{01}{\Gamma^0}_{10} + {\Gamma^0}_{11}{\Gamma^1}_{10} + {\Gamma^1}_{01}{\Gamma^0}_{11} + {\Gamma^1}_{11}{\Gamma^1}_{11} + {\Gamma^2}_{21}{\Gamma^2}_{12} + {\Gamma^3}_{31}{\Gamma^3}_{13} \\
&= \tfrac{1}{4}\alpha'^2 + \tfrac{1}{4}\dot{\beta}^2 e^{\beta-\alpha} + \tfrac{1}{4}\dot{\beta}^2 e^{\beta-\alpha} + \tfrac{1}{4}\beta'^2 + \tfrac{1}{r^2} + \tfrac{1}{r^2} \\
&= \tfrac{1}{4}\alpha'^2 + \tfrac{1}{4}\beta'^2 + \tfrac{2}{r^2} + \tfrac{1}{2}\dot{\beta}^2 e^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \tfrac{1}{2}\beta'' + \left(\tfrac{1}{2}\ddot{\beta} + \tfrac{1}{2}\dot{\beta}^2 - \dot{\beta}\dot{\alpha}\right) e^{\beta-\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha'' - \tfrac{1}{2}\beta'' + \tfrac{2}{r^2} \\
&\quad + \tfrac{1}{4}\beta'\alpha' + \tfrac{1}{4}\beta'^2 + \tfrac{1}{r}\beta' + \left(\tfrac{1}{4}\dot{\beta}\dot{\alpha} + \tfrac{1}{4}\dot{\beta}^2\right) e^{\beta-\alpha} \\
&\qquad - \tfrac{1}{4}\alpha'^2 - \tfrac{1}{4}\beta'^2 - \tfrac{2}{r^2} - \tfrac{1}{2}\dot{\beta}^2 e^{\beta-\alpha} \\
&= -\tfrac{1}{2}\alpha'' + \tfrac{1}{4}\beta'\alpha' + \tfrac{1}{r}\beta' - \tfrac{1}{4}\alpha'^2 + \left(\tfrac{1}{2}\ddot{\beta} + \tfrac{1}{4}\dot{\beta}^2 - \tfrac{3}{4}\dot{\beta}\dot{\alpha}\right) e^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

Calculons la composante R_{22} :

$$R_{22} = \partial_r {\Gamma^r}_{22} - \partial_2 {\Gamma^r}_{r2} + {\Gamma^k}_{22}\,{\Gamma^r}_{rk} - {\Gamma^k}_{r2}\,{\Gamma^r}_{2k}$$

$$\begin{aligned}
\partial_r {\Gamma^r}_{22} &= \partial_0 {\Gamma^0}_{22} + \partial_1 {\Gamma^1}_{22} + \partial_2 {\Gamma^2}_{22} + \partial_3 {\Gamma^3}_{22} \\
&= \partial_1 {\Gamma^1}_{22} \\
&= \partial_r \left(-re^{-\beta}\right) \\
&= -e^{-\beta} + r\beta' e^{-\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_2 {\Gamma^r}_{r2} &= \partial_2 {\Gamma^0}_{02} + \partial_2 {\Gamma^1}_{12} + \partial_2 {\Gamma^2}_{22} + \partial_2 {\Gamma^3}_{32} \\
&= \partial_2 {\Gamma^3}_{32} \\
&= \partial_\theta \cot(\theta) \\
&= -1 - \cot^2(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{\Gamma^k}_{22}\,{\Gamma^r}_{rk} &= {\Gamma^0}_{22}\,{\Gamma^r}_{r0} + {\Gamma^1}_{22}\,{\Gamma^r}_{r1} + {\Gamma^2}_{22}\,{\Gamma^r}_{r2} + {\Gamma^3}_{22}\,{\Gamma^r}_{r3} \\
&= {\Gamma^1}_{22}\left({\Gamma^0}_{01} + {\Gamma^1}_{11} + {\Gamma^2}_{21} + {\Gamma^3}_{31}\right) \\
&= -re^{-\beta}\left(\tfrac{1}{2}\alpha' + \tfrac{1}{2}\beta' + \tfrac{1}{r} + \tfrac{1}{r}\right) \\
&= -\tfrac{1}{2}r\left(\alpha' + \beta'\right)e^{-\beta} - 2e^{-\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^k{}_{r2}\Gamma^r{}_{2k} &= \Gamma^0{}_{r2}\Gamma^r{}_{20} + \Gamma^1{}_{r2}\Gamma^r{}_{21} + \Gamma^2{}_{r2}\Gamma^r{}_{22} + \Gamma^3{}_{r2}\Gamma^r{}_{23} \\
&= \Gamma^1{}_{r2}\Gamma^r{}_{21} + \Gamma^2{}_{r2}\Gamma^r{}_{22} + \Gamma^3{}_{r2}\Gamma^r{}_{23} \\
&= \Gamma^1{}_{02}\Gamma^0{}_{21} + \Gamma^1{}_{12}\Gamma^1{}_{21} + \Gamma^1{}_{21}\Gamma^2{}_{21} + \Gamma^1{}_{31}\Gamma^3{}_{21} \\
&\quad + \Gamma^2{}_{02}\Gamma^0{}_{22} + \Gamma^2{}_{12}\Gamma^1{}_{22} + \Gamma^2{}_{22}\Gamma^2{}_{22} + \Gamma^2{}_{32}\Gamma^3{}_{22} \\
&\qquad + \Gamma^3{}_{02}\Gamma^0{}_{23} + \Gamma^3{}_{12}\Gamma^1{}_{23} + \Gamma^3{}_{22}\Gamma^2{}_{23} + \Gamma^3{}_{32}\Gamma^3{}_{23} \\
&= \Gamma^1{}_{12}\Gamma^1{}_{21} + \Gamma^2{}_{12}\Gamma^1{}_{22} + \Gamma^3{}_{32}\Gamma^3{}_{23} \\
&= \tfrac{1}{r} \times -re^{-\beta} + \tfrac{1}{r} \times -re^{-\beta} + \cot(\theta)\cot(\theta) \\
&= -2e^{-\beta} + \cot^2(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= -e^{-\beta} + r\beta' e^{-\beta} + 1 + \cot^2(\theta) - \tfrac{1}{2}r\left(\alpha' + \beta'\right)e^{-\beta} - 2e^{-\beta} + 2e^{-\beta} - \cot^2(\theta) \\
&= -\left[1 + \tfrac{r}{2}(\alpha' - \beta')\right]e^{-\beta} + 1
\end{aligned}$$

23.4.10 Courbure riemannienne scalaire

La contraction du tenseur de courbure de Ricci, définition 23.4.4 p. 289, donne un invariant (le seul possible) :

Définition 23.4.5. *Courbure de Ricci*
Le scalaire

$$\begin{aligned}
R &\triangleq g^{is}g^{jr}R_{ij,rs} \\
&= g^{is}R_i{}^r{}_{,rs} \\
&= g^{is}R_{is} \\
&= R_i^i
\end{aligned}$$

est appelé courbure de Ricci ou courbure riemannienne scalaire de l'espace R_n.

Dans un espace de Riemann à n dimensions :

$$R_i^i = R_0^0 + R_1^1 + R_2^2 + \cdots + R_n^n$$

Réciproquement, avec la relation (52) p. 102 pour un espace à n dimensions :

$$\begin{aligned}
g_{ij}g^{ij}R_{ij} &= g_{ij}R \\
R_{ij} &= \tfrac{1}{n}\,g_{ij}R
\end{aligned}$$

Exemple 23.4.8. *Dans un espace riemannien de dimension deux, d'après l'exemple 23.4.2 p. 285, les seules composantes du tenseur de Riemann-Christoffel non nulles sont les suivantes :*

$$R_{12,12} = -R_{12,21} = R_{21,21} = -R_{21,12}$$

Avec la relation (50) p. 102 sur le déterminant du tenseur métrique dual, la courbure de Ricci a pour expression :

$$\begin{aligned} R &= g^{12}g^{21}R_{12,12} + g^{21}g^{12}R_{21,21} + g^{11}g^{22}R_{12,21} + g^{22}g^{11}R_{21,12} \\ &= \left(g^{12}g^{21} + g^{21}g^{12} - g^{11}g^{22} - g^{22}g^{11}\right) R_{12,12} \\ &= 2\left(g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21}\right) R_{12,12} \\ &= -2g^{-1}R_{12,12} \end{aligned}$$

Réciproquement :

$$\begin{aligned} R_{12,12} &= -\tfrac{1}{2}gR \\ &= -\tfrac{1}{2}R\left(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}\right) \end{aligned}$$

Exemple 23.4.9. *En utilisant l'inverse du tenseur métrique (54) p. 103 et l'exemple 23.4.6 p. 290, la courbure de Ricci d'une sphère de rayon r s'écrit :*

$$\begin{aligned} R &= g^{ij}R_{ij} \\ &= g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi} \\ &= \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\sin^2(\theta) \\ &= \frac{2}{r^2} \end{aligned}$$

23.4.11 Secondes identités de Bianchi

Nous pouvons obtenir de nouvelles identités par dérivation du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel. Adoptons un système de coordonnées localement géodésiques en un point M de R_n, les symboles de Christoffel sont alors nuls, la définition 23.4.1 p. 279 du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel s'écrit :

$$\forall h,i,r,s \quad R^h{}_{i,rs} = \partial_r\Gamma^h{}_{si} - \partial_s\Gamma^h{}_{ri}$$

Dans le système de coordonnées localement géodésiques la dérivation covariante se réduit à la dérivation partielle ordinaire :

$$\forall h,i,r,s,t \quad \nabla_t R^h{}_{i,rs} = \partial_{tr}\Gamma^h{}_{si} - \partial_{ts}\Gamma^h{}_{ri}$$

Par permutation circulaire sur les indices r, s, t, nous avons :

$$\begin{aligned} \forall h,i,r,s,t \quad \nabla_r R^h{}_{i,st} = \partial_{rs}\Gamma^h{}_{ti} - \partial_{rt}\Gamma^h{}_{si} \\ \forall h,i,r,s,t \quad \nabla_s R^h{}_{i,tr} = \partial_{st}\Gamma^h{}_{ri} - \partial_{sr}\Gamma^h{}_{ti} \end{aligned}$$

puis par addition :

$$\boxed{\forall h,i,r,s,t \quad \nabla_t R^h{}_{i,rs} + \nabla_r R^h{}_{i,st} + \nabla_s R^h{}_{i,tr} = 0}$$

La dérivée covariante d'un tenseur étant un tenseur, chacun des membres de l'identité est un tenseur, cette relation est une relation tensorielle. Les identités de Bianchi sont donc valables dans tout système de coordonnées, en tout point de R_n.

23.4.12 Tenseur d'Einstein

Toujours au paragraphe 26.9 p. 347, nous verrons que pour établir les équations de la relativité générale, la divergence du tenseur symétrique d'ordre deux que nous cherchons doit être nulle. En effet, ce tenseur qui représente la courbure de l'espace-temps doit être égale au tenseur impulsion-énergie qui est conservatif, donc de divergence nulle (théorème de divergence 22.4.1 p. 254). Effectuons une double contraction des secondes identités de Bianchi :

(1) Pour $t = h$:

$$\begin{aligned} \forall i, r, s \quad \nabla_h R^h{}_{i,rs} + \nabla_r R^h{}_{i,sh} + \nabla_s R^h{}_{i,hr} &= 0 \\ \nabla_h R^h{}_{i,rs} - \nabla_r R^h{}_{i,hs} + \nabla_s R^h{}_{i,hr} &= 0 \\ \nabla_h R^h{}_{i,rs} - \nabla_r R_{is} + \nabla_s R_{ir} &= 0 \\ \forall k, r, s \quad g^{ik} \nabla_h R^h{}_{i,rs} - g^{ik} \nabla_r R_{is} + g^{ik} \nabla_s R_{ir} &= 0 \end{aligned}$$

La dérivée covariante du tenseur métrique étant nulle, (143) p. 242 :

$$\begin{aligned} \nabla_h \left(g^{ik} R^h{}_{i,rs} \right) - \nabla_r \left(g^{ik} R_{is} \right) + \nabla_s \left(g^{ik} R_{ir} \right) &= 0 \\ \nabla_h R^{hk}{}_{,rs} - \nabla_r R^k_s + \nabla_s R^k_r &= 0 \end{aligned}$$

(2) puis pour $s = k$:

$$\begin{aligned} \forall r \quad \nabla_h R^{hk}{}_{,kr} + \nabla_k R^k_r - \nabla_r R^k_k &= 0 \\ \nabla_h R^h_r + \nabla_k R^k_r - \nabla_r R &= 0 \\ 2 \nabla_k R^k_r - \nabla_r R &= 0 \\ \nabla_k R^k_r - \tfrac{1}{2}\, \delta^k_r \nabla_k R &= 0 \\ \nabla_k R^k_r - \tfrac{1}{2} \nabla_k \delta^k_r R &= 0 \\ \nabla_k \left(R^k_r - \tfrac{1}{2}\, \delta^k_r R \right) &= 0 \end{aligned} \tag{183}$$

Définition 23.4.6. *Tenseur d'Einstein*
Le tenseur

$$\forall k, r \quad S^k_r \triangleq R^k_r - \tfrac{1}{2}\, \delta^k_r R$$

est appelé tenseur d'Einstein.

Par symétrie du tenseur de courbure de Ricci et du tenseur fondamental, ce tenseur est symétrique. La relation (183) exprime que la divergence du tenseur d'Einstein est nulle (relation (146) p. 243). Les composantes covariantes de ce tenseur s'écrivent :

$$\begin{aligned} \forall k, r \quad g_{ik} S^i_r &= g_{ik} R^i_r - \tfrac{1}{2}\, g_{ik} \delta^i_r R \\ S_{kr} &= R_{kr} - \tfrac{1}{2}\, g_{kr} R \end{aligned} \tag{184}$$

24

Dynamique classique

24.1 Exemple d'application de la géométrie de Riemann

La géométrie de Riemann trouve une application importante dans les problèmes de mécanique. Soit un système dynamique se déplaçant dans l'espace ordinaire, euclidien à trois dimensions. Prenons le cas d'un pendule sphérique. La tige du pendule exerce une force sur la masse l'obligeant à se déplacer sur une sphère. Nous pouvons ignorer cette force et considérer directement que la masse se déplace sur une sphère, sans jamais la quitter. Nous savons que l'espace accessible à la masse du pendule simple est une sphère. Dans le cas général pour trouver la forme de l'espace accessible, la force doit pouvoir être remplacée par une fonction des coordonnées, de la forme

$$F\left(x^1, x^2, x^3\right) = 0$$

La force est alors dite *holonome*. Par exemple pour le pendule sphèrique :

$$\rho = c^{ste}$$

Dans le cas présent elle est aussi *scléronome*, c'est-à-dire indépendante du temps. Grâce à cette relation, pour décrire le mouvement de la masse nous passons de :

— trois coordonnées sphériques (ρ, θ, ϕ), une force, un espace euclidien

à :

— deux coordonnées (θ, ϕ), aucune force, un espace courbe (la sphère)

Lorsque l'on utilise un nombre minimal de coordonnées pour décrire l'évolution du système, on parle de *coordonnées généralisées*. Ici ce sont deux angles, et l'espace riemannien correspondant est une surface.

En l'absence de champ de gravitation, la masse ne peut décrire que des grands cercles de la sphère, c'est-à-dire des géodésiques de cet espace riemannien. De plus la masse se déplace à vitesse constante en norme.

Lorsqu'il existe une force dérivant d'une énergie potentielle, par exemple un champ de gravitation, nous verrons qu'il existe quand même un espace riemannien dans lequel les trajectoires sont encore toutes des géodésiques.

Enfin, lorsque la longueur de la tige varie dans le temps, par exemple un moteur allonge ou raccourcit la tige, la liaison est holonome *rhéonome*. Nous pouvons encore supprimer la force, mais l'espace riemannien évolue dans le temps. Le temps devient une nouvelle coordonnée, au même titre que les coordonnées spatiales, et nous considérons l'évolution du système dans un nouvel espace riemannien ayant une dimension supplémentaire. Dans le cas du pendule sphérique, l'espace riemannien a alors trois coordonnées, (θ, ϕ, t).

24.2 Systèmes holonomes à liaisons scléronomes

Considérons un système dynamique S à n degrés de liberté, c'est-à-dire un système à n coordonnées généralisées (q^i). L'évolution temporelle de ce système est représentée par un point M se déplaçant dans un espace de dimension n ayant les (q^i) pour système de coordonnées, appelé *espace de configuration*. Cet espace de configuration est l'ensemble des configurations possibles du système, il constitue une variété différentielle à n dimensions, autrement dit un espace riemannien V_n. Lorsque les liaisons sont holonomes, parfaites et indépendantes du temps, l'espace de configuration n'évolue pas dans le temps : les composantes g_{ij} du tenseur métrique de l'espace de configuration ne sont pas des fonctions explicites du temps. Soit ds l'élément linéaire de l'espace de configuration, d'après (72) p. 144

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j$$

où les indices latins varient de 1 à n, et où les g_{ij} sont fonction des q^i uniquement.

24.2.1 Cinématique

Le vecteur vitesse a pour composantes contravariantes,

$$\forall i \quad v^i = \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i$$

et pour composantes covariantes :

$$\forall i \quad v_i = g_{ij} v^j = g_{ij} \dot{q}^j = \dot{q}_i$$

Exprimons l'énergie cinétique à partir de la vitesse et de l'élément linéaire :

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} m v^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \\ &= \tfrac{1}{2} m g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \end{aligned}$$

On remarque que le carré de l'élément linéaire s'écrit :

$$ds^2 = \frac{2T}{m} dt^2 \tag{185}$$

Remarque 48. *On peut toujours changer d'unité de masse et poser $m = 1$ pour avoir :*

$$ds^2 = 2T\, dt^2$$

On peut également diviser l'unité de longueur des q^i par $\sqrt{m}$ et obtenir le même résultat.

Dérivons l'énergie cinétique par rapport à la vitesse :

$$
\begin{aligned}
\forall i \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\tfrac{1}{2} m g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j\right) \\
&= \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\sum_i g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \sum_j g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j\right) \\
&= \frac{m}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\sum_i g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \sum_i g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j\right) \\
&= m g_{ij} \dot{q}^j \\
&= m v_i
\end{aligned} \tag{186}
$$

Or, les composantes de l'impulsion généralisée s'écrivent :

$$
\forall i \quad p_i \triangleq \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}
$$

où $\mathscr{L} = T - V$ est le lagrangien. Lorsque l'énergie potentielle totale V ne dépend pas des vitesses généralisées :

$$
\begin{aligned}
\forall i \quad p_i &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \\
&= m v_i
\end{aligned}
$$

Les composantes de l'impulsion généralisée ne sont autres que les composantes covariantes de la vitesse du point représentatif M dans l'espace riemannien V_n des configurations, multipliée par la masse.

Pour l'accélération, servons-nous de la définition (140) p. 238 du vecteur unitaire $\mathbf{u}$ tangent à la trajectoire $\mathscr{C}$ au point M :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= 1 \\
\frac{d}{ds}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) &= 0 \\
2 \frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \mathbf{u} &= 0 \\
\frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \mathbf{u} &= 0
\end{aligned}
$$

Le vecteur $d\mathbf{u}/ds$ est soit nul soit orthogonal à $\mathbf{u}$ partout sur la trajectoire $\mathscr{C}$. D'après (136) p. 236, il a pour composantes les dérivées absolues Du^i/ds. Il n'est pas unitaire, appelons ρ sa norme. On définit un vecteur unitaire $\mathbf{n}$ qui lui est colinéaire :

$$
\boxed{\forall i \quad \frac{Du^i}{ds} = \frac{n^i}{\rho}}
$$

Le vecteur unitaire $\mathbf{n}$, colinéaire au vecteur orthogonal à la tangente à $\mathscr{C}$, est appelé *vecteur de la normale principale* à $\mathscr{C}$. La dérivation absolue de la vitesse par rapport au temps donne l'accélération :

$$\begin{aligned}\forall i \quad a^i &= \frac{Dv^i}{dt} \\ &= \frac{D\left(vu^i\right)}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt}\,u^i + v\,\frac{Du^i}{ds}\,\frac{ds}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt}\,u^i + \frac{v^2}{\rho}\,n^i \end{aligned} \tag{187}$$

Le vecteur accélération se décompose en une accélération tangentielle et une accélération normale. Le scalaire $\rho(s)$ a la dimension d'une longueur et est appelé *rayon de courbure* de $\mathscr{C}$ au point considéré. ρ^{-1} est appelé *courbure* de $\mathscr{C}$ dans V_n.

24.2.2 Les équations de la dynamique

En l'absence d'hypothèses sur le caractère conservatif ou non des forces généralisées Q_i s'exerçant sur le système, le mouvement du système est déterminé par les équations de Lagrange sous leur forme la plus générale :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i \tag{188}$$

Désignons par $Q_i \delta q^i$ le travail élémentaire des forces extérieures appliquées au système lors d'un déplacement virtuel arbitraire δq^i. C'est un scalaire qui ne dépend pas du système de coordonnées dans lequel on l'exprime, car si c'était le cas le système gagnerait ou perdrait de l'énergie par changement de coordonnées. C'est donc un invariant par changement de coordonnées. Les δq^i étant les composantes contravariantes d'un vecteur, les Q_i sont les composantes covariantes du vecteur force généralisées de V_n. Remplaçons l'énergie cinétique par son expression donnée par les relations (186) p. 299 :

$$\forall i \quad \frac{d}{dt}\left(m g_{ij} \dot{q}^j\right) - \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\tfrac{1}{2}\, m g_{kj} \dot{q}^k \dot{q}^j\right) = Q_i \tag{189}$$

Le calcul suivant est identique à celui de la démonstration du théorème 23.2.1 p. 268 :

$$\begin{aligned}
&\forall i \quad m\left(g_{ij}\ddot{q}^j + \frac{dg_{ij}}{dq^k}\,\frac{dq^k}{dt}\,\dot{q}^j - \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\,\dot{q}^k\dot{q}^j\right) = Q_i \\
&\forall i \quad m\left(g_{ij}\ddot{q}^j + g_{ij,k}\dot{q}^k\dot{q}^j - \tfrac{1}{2}\,\partial_i g_{kj}\dot{q}^k\dot{q}^j\right) = Q_i \\
&\forall i \quad m\left[g_{ij}\ddot{q}^j + \left(g_{ij,k} - \tfrac{1}{2}\,\partial_i g_{kj}\right)\dot{q}^k\dot{q}^j\right] = Q_i
\end{aligned}$$

En remarquant que $g_{ij,k}\dot{q}^k\dot{q}^j = g_{ki,j}\dot{q}^k\dot{q}^j$:

$$\begin{aligned}
&\forall i \quad m\left[g_{ij}\ddot{q}^j + \left(\tfrac{1}{2}\,g_{ki,j} + \tfrac{1}{2}\,g_{ij,k} - \tfrac{1}{2}\,\partial_i g_{kj}\right)\dot{q}^k\dot{q}^j\right] = Q_i \\
&\forall i \quad m\left[g_{ij}\ddot{q}^j + \tfrac{1}{2}\left(g_{ki,j} + g_{ij,k} - \partial_i g_{kj}\right)\dot{q}^k\dot{q}^j\right] = Q_i \\
&\forall i \quad m\left(g_{ij}\ddot{q}^j + \Gamma_{kij}\,\dot{q}^k\dot{q}^j\right) = Q_i
\end{aligned}$$

Par multiplication contractée par $g_{ih}g^{ih} = 4$ (relation (52) p. 102) :

$$\begin{aligned}
&\forall i \quad m g_{ih} \left(\delta_j^h \, \ddot{q}^j + g^{ih} \Gamma_{kij} \, \dot{q}^k \dot{q}^j \right) = Q_i \\
&\forall i \quad m g_{ih} \left(\ddot{q}^h + \Gamma^h{}_{kj} \, \dot{q}^k \dot{q}^j \right) = Q_i \\
&\forall i \quad m g_{ih} \left(\frac{dv^h + v^j \Gamma^h{}_{kj} \, dq^k}{dt} \right) = Q_i \\
&\forall i \quad m g_{ih} \left(\frac{dv^h + v^j \omega^h{}_j}{dt} \right) = Q_i \\
&\forall i \quad m g_{ih} \frac{Dv^h}{dt} = Q_i \\
&\forall i \quad m \frac{Dv_i}{dt} = Q_i \\
&\forall i \quad m a_i = Q_i
\end{aligned}$$

Ainsi les membres de gauche des équations de Lagrange (188) p. 300 ne sont autres que les composantes covariantes du vecteur accélération de M dans l'espace riemannien de configuration. Les équations de Lagrange étendent la relation fondamentale de la dynamique aux espaces courbes. D'après les relations (187) p. 300, on peut encore écrire les équations du mouvement sous la forme :

$$\boxed{\forall i \quad m \frac{dv}{dt} u_i + m \frac{v^2}{\rho} n_i = Q_i} \tag{190}$$

Au cours du mouvement le vecteur force généralisée reste dans le plan défini par la tangente à la trajectoire et par la normale principale.

24.2.3 Absence de forces extérieures

En l'absence de forces extérieures exercées sur le système, c'est-à-dire lorsque les Q_i sont nulles, l'énergie cinétique est constante puisqu'il n'y a pas d'énergie potentielle, la vitesse est donc constante et l'accélération nulle, le point M suit une géodésique de V_n :

$$\begin{aligned}
&\forall i \quad a_i = 0 \\
&\forall i \quad m \frac{dv}{dt} u_i + m \frac{v^2}{\rho} n_i = 0
\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = 0 \\ 1/\rho = 0 \end{cases}$$

La courbure est nulle dans l'espace riemannien. À partir des relations (189) p. 300 nous avons également :

$$\forall i \quad \frac{d}{dt} \left(m g_{ij} \dot{q}^j \right) - \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\tfrac{1}{2} m g_{kj} \dot{q}^k \dot{q}^j \right) = 0$$

$$\ddot{q}_i - \tfrac{1}{2} \partial_i g_{kj} \dot{q}^k \dot{q}^j = 0 \tag{191}$$

Ce sont les équations des coordonnées de la géodésique suivie par le système dans l'espace de Riemann des configurations

24.2.4 Forces dérivant toutes d'une énergie potentielle

Supposons que le vecteur force généralisée dérive d'une énergie potentielle indépendante du temps :

$$\forall i \quad Q_i = -\partial_i V(q^i)$$

En prenant le produit scalaire de la relation (190) p. 301 par le vecteur vitesse,

$$\begin{aligned}
v^i \left(m \frac{dv}{dt} \, u_i + m \frac{v^2}{\rho} \, n_i \right) &= Q_i v^i \\
m v u^i \left(\frac{dv}{dt} \, u_i + \frac{v^2}{\rho} \, n_i \right) &= -\frac{\partial V}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} \\
m v \frac{dv}{dt} &= -\frac{dV}{dt} \\
\int m v dv &= -\int dV \\
\tfrac{1}{2} m v^2 + V &= c^{ste}
\end{aligned}$$

qui est l'équation de conservation de l'énergie mécanique d'un système conservatif (dont les forces dérivent toutes d'un potentiel). La constante est l'énergie mécanique totale E. Cette équation nous donne l'expression de la vitesse d'un système conservatif :

$$v = \sqrt{2\,(E - V)}$$

À partir des relations (189) p. 300, la loi du mouvement du système s'écrit :

$$\boxed{\forall i \quad m \frac{d}{dt} \left(g_{ij} \dot{q}^j \right) - \frac{m}{2} \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} \, \dot{q}^k \dot{q}^j = -\frac{\partial V}{\partial q^i}}$$

Ce ne sont pas les équations des coordonnées d'une géodésique à cause du membre de droite non nul. Cependant, dans le paragraphe suivant nous montrons que nous pouvons quand même réduire le problème à la recherche d'une géodésique.

24.2.5 Recherche d'une géodésique

Déterminons la trajectoire fictive du point représentatif d'un système en présence d'une énergie potentielle, sous la forme d'une géodésique. Gardons l'hypothèse de conservation de l'énergie mécanique du paragraphe précédent (système conservatif).

— Dans la loi du mouvement, remplaçons le temps par la fonction à déterminer $\theta(t)$. Les coordonnées sont maintenant des fonctions de la fonction $\theta(t)$:

$$\begin{aligned}
&\forall i \quad q^i = q^i \left[\theta(t) \right] \\
&\forall i \quad \frac{dq^i \left[\theta(t) \right]}{dt} = \frac{dq^i}{d\theta(t)} \, \frac{d\theta(t)}{dt} \\
&\forall i \quad \dot{q}^i = \frac{dq^i}{d\theta} \, \dot{\theta}
\end{aligned}$$

La loi horaire ne dépend plus explicitement du temps mais cela ne change pas la forme de la trajectoire suivie par le système :

$$\forall i \quad m\,\frac{d\theta}{dt}\,\frac{d}{d\theta}\left(g_{ij}\,\frac{dq^j}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right)-\frac{m}{2}\,\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}\,\frac{dq^k}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\,\frac{dq^j}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}+\frac{\partial V}{\partial q^i}=0$$

$$\forall i \quad \dot{\theta}\,\frac{d}{d\theta}\left(g_{ij}\,\frac{dq^j}{d\theta}\,\dot{\theta}\right)-\frac{1}{2}\,\dot{\theta}^2\,\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}\,\frac{dq^k}{d\theta}\,\frac{dq^j}{d\theta}+\frac{1}{m}\,\frac{\partial V}{\partial q^i}=0 \tag{192}$$

— Changeons d'espace de configuration en changeant de métrique mais pas de système de coordonnées (q^i) :

$$\begin{aligned} ds'^2 &= F(q^i)ds^2 \\ &= F(q^i)g_{ij}dq^i dq^j \\ &= g'_{ij}dq^i dq^j \end{aligned}$$

Par la suite nous fixerons la nouvelle métrique par l'intermédiaire de la fonction inconnue $F(q^i)$ de telle sorte que la trajectoire soit une géodésique dans le nouvel espace de configuration. Cherchons la composante covariante de la vitesse dans cette nouvelle métrique en utilisant la fonction $\theta(t)$:

$$\begin{aligned} \forall i \quad q'_i &= g'_{ij}q^j \\ &= F(q^i)g_{ij}q^j \\ \forall i \quad \frac{dq'_i}{d\theta} &= F(q^i)g_{ij}\,\frac{dq^j}{d\theta} \end{aligned}$$

Par analogie avec les relations (191) p. 301, les équations des coordonnées d'une géodésique de ce nouvel espace de configuration sont données par :

$$\forall i \quad \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dq'_i}{d\theta}\right)-\frac{1}{2}\,\frac{\partial g'_{jk}}{\partial q^i}\,\frac{dq^j}{d\theta}\,\frac{dq^k}{d\theta}=0$$

$$\forall i \quad \frac{d}{d\theta}\left(F g_{ij}\,\frac{dq^j}{d\theta}\right)-\frac{1}{2}\,F\,\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}\,\frac{dq^k}{d\theta}\,\frac{dq^j}{d\theta}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial F}{\partial q^i}\,g_{kj}\,\frac{dq^k}{d\theta}\,\frac{dq^j}{d\theta}=0$$

Puisque le choix de la fonction $\theta(t)$ est libre, prenons la égale à l'abscisse curviligne s' (qui est bien fonction du temps). Nous avons alors,

$$\begin{aligned} F g_{kj}\,\frac{dq^k}{d\theta}\frac{dq^j}{d\theta} &= F g_{kj}\,\frac{dq^k}{ds'}\frac{dq^j}{ds'} \\ &= \frac{ds'^2}{ds'^2} \\ g_{kj}\,\frac{dq^k}{d\theta}\frac{dq^j}{d\theta} &= \frac{1}{F} \end{aligned}$$

et par conséquent (en gardant θ plutôt que s') :

$$\forall i \quad \frac{d}{d\theta}\left(F g_{ij}\,\frac{dq^j}{d\theta}\right)-\frac{1}{2}\,F\,\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}\,\frac{dq^k}{d\theta}\,\frac{dq^j}{d\theta}-\frac{1}{2F}\,\frac{\partial F}{\partial q^i}=0$$

$$\forall i \quad F\,\frac{d}{d\theta}\left(F g_{ij}\,\frac{dq^j}{d\theta}\right)-\frac{1}{2}\,F^2\,\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}\,\frac{dq^k}{d\theta}\,\frac{dq^j}{d\theta}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial F}{\partial q^i}=0$$

Cette relation s'identifie avec la loi du mouvement du système (192) p. 303, si l'on prend :

$$F(q^i)=\dot{\theta} \qquad \text{et} \qquad F(q^i)=c^{ste}-\frac{2V}{m}$$

Pour la constante, prenons le double de l'énergie mécanique totale divisée par la masse :

$$F(q^i) = \frac{2}{m}\left[E - V(q^i)\right]$$

Dans cette relation il vaut mieux ne pas remplacer $E - V$ par T, car T est fonction des vitesses. Dans l'hypothèse de la conservation de l'énergie mécanique, la trajectoire d'un système dynamique qui correspond à une valeur donnée de l'énergie mécanique est une géodésiques de l'espace de configuration pour la métrique riemannienne :

$$\begin{aligned} ds'^2 &= F(q^i) g_{ij} dq^i dq^j \\ &= \frac{2}{m}\left(E - V(q^i)\right) g_{ij} dq^i dq^j \end{aligned}$$

La loi horaire selon laquelle ces géodésiques sont décrites au cours du temps est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{2}{m}\left(E - V(q^i)\right) \\ \theta(t) &= \int \frac{2}{m}\left(E - V(q^i)\right) dt \\ &= \frac{2t}{m}\left(E - V(q^i)\right) + \theta(t=0) \end{aligned}$$

24.3 Systèmes holonomes à liaisons rhéonomes

Considérons un système dynamique à n degrés de liberté. Lorsque les liaisons sont holonomes, parfaites et dépendantes du temps, les configurations possibles pour le système dépendent de l'instant considéré. Nous sommes amenés à substituer à l'espace de configuration, *l'espace-temps de configuration*, c'est-à-dire une variété à $n+1$ dimensions V_{n+1}, pour laquelle les q^i et le temps q^0 constituent un système de coordonnées. Le point représentatif du système dynamique se déplace en fonction du temps, sur une hypersurface qui se déforme dans le temps.

Remarque 49. *Le passage à un système de coordonnées en mouvement est traité comme un cas particulier de liaisons holonomes dépendantes du temps. On utilise les mêmes formules mais le nombre de coordonnées ne change pas.*

Soit ds l'élément linéaire de l'espace-temps de configuration,

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dq^\alpha dq^\beta$$

où les indices grecs varient de 0 à n, et où les $g_{\alpha\beta}$ sont fonction des q^λ.

Le vecteur vitesse a pour composantes contravariantes,

$$\forall\alpha \quad v^\alpha = \frac{dq^\alpha}{dt} = \dot{q}^\alpha$$

de sorte que :

$$\begin{cases} \forall i \quad \dot{q}^i = \dfrac{dq^i}{dt} \\ \dot{q}^0 = 1 \end{cases} \tag{193}$$

Le vecteur vitesse a pour composantes covariantes :

$$\forall\alpha \quad v_\alpha = g_{\alpha\beta} v^\beta = g_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta = \dot{q}_\alpha$$

Exprimons l'énergie cinétique à partir de la vitesse et de l'élément linéaire :

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} m v^2 \\ &= \frac{1}{2}\, m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{2} m g_{\alpha\beta}\, \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \end{aligned}$$

Comme pour le cas scléronome :

$$ds^2 = \frac{2T}{m}\, dt^2$$

En dérivant l'énergie cinétique par rapport à la vitesse :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha}\, \frac{m}{2} \left(\sum_\alpha g_{\alpha\beta}\, \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \sum_\beta g_{\alpha\beta}\, \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \right) \\ &= \frac{m}{2}\, \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \left(\sum_\alpha g_{\alpha\beta}\, \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \sum_\alpha g_{\alpha\beta}\, \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \right) \\ &= m g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta \\ &= m v_\alpha \end{aligned}$$

Les n composantes p_i de l'impulsion généralisée sont donc encore égales aux n composantes covariantes v_i de la vitesse multipliée par la masse.

La dérivée absolue de la vitesse par rapport au temps donne l'accélération :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \quad a^\alpha &= \frac{D v^\alpha}{dt} \\ &= \ddot{q}^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}\, \dot{q}^\gamma \dot{q}^\beta \end{aligned}$$

Pour les composantes covariantes de l'accélération :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \quad a_\alpha &= g_{\alpha\beta}\, \frac{D v^\beta}{dt} \\ &= g_{\alpha\beta} \ddot{q}^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma\beta}\, \dot{q}^\gamma \dot{q}^\beta \end{aligned}$$

Avec (193) p. 304, $\dot{q}^0 = 1 \;\Rightarrow\; \ddot{q}^0 = 0$, pour la composante temporelle de l'accélération :

$$\begin{aligned} a_0 &= g_{0\beta} \ddot{q}^\beta + \Gamma_{0\gamma\beta}\, \dot{q}^\gamma \dot{q}^\beta \\ &= g_{0i} \ddot{q}^i + \Gamma_{0ik}\, \dot{q}^i \dot{q}^k + \Gamma_{0i0}\, \dot{q}^i + \Gamma_{00k}\, \dot{q}^k + \Gamma_{000} \end{aligned}$$

Avec les relations (126) p. 225, $\Gamma_{0i0} = \frac{1}{2}\, g_{00,i}$, $\Gamma_{00k} = \frac{1}{2}\, g_{00,k}$, $\Gamma_{000} = \frac{1}{2}\, g_{00,0}$:

$$a_0 = g_{0i} \ddot{q}^i + \Gamma_{0ik}\, \dot{q}^i \dot{q}^k + g_{00,i} \dot{q}^i + \tfrac{1}{2}\, g_{00,0}$$

24.3.1 Les équations de la dynamique

Quel que soit le type de liaison, scléronome ou rhéonome, le mouvement du système est déterminé par les équations de Lagrange :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i$$

où l'énergie cinétique est maintenant fonction de $\dot{q}^0$. Cherchons l'équation pour l'indice 0. Effectuons le produit scalaire par $\dot{q}^i$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right)\dot{q}^i - \frac{\partial T}{\partial q^i}\,\dot{q}^i &= Q_i\dot{q}^i \\
\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\ddot{q}^i\right] - \frac{\partial T}{\partial q^i}\,\dot{q}^i &= Q_i\dot{q}^i \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\ddot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial q^i}\,\dot{q}^i\right) &= Q_i\dot{q}^i
\end{aligned} \tag{194}$$

Réécrivons le premier terme du membre de gauche. L'énergie cinétique est une fonction homogène de degré deux des vitesses généralisées (si les variables, ici les vitesses généralisées, sont multipliées par un scalaire, le résultat est multiplié par ce scalaire au carré) :

$$T\left(\lambda\dot{q}^0, \ldots, \lambda\dot{q}^n\right) = \lambda^2\, T\left(\dot{q}^0, \ldots, \dot{q}^n\right)$$

En différentiant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial\left(\lambda\dot{q}^\alpha\right)}\, d\left(\lambda\dot{q}^\alpha\right) &= d\left(\lambda^2 T\right) \\
\frac{\partial T}{\partial\left(\lambda\dot{q}^\alpha\right)}\,\frac{d\left(\lambda\dot{q}^\alpha\right)}{d\lambda} &= \frac{d\left(\lambda^2 T\right)}{d\lambda} \\
\frac{\partial T}{\partial\left(\lambda\dot{q}^\alpha\right)}\,\dot{q}^\alpha &= 2\lambda\, T
\end{aligned}$$

En posant $\lambda = 1$ nous trouvons

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\,\dot{q}^\alpha = 2T$$

appelée identité d'Euler, ici pour une fonction homogène de degré deux. Changeons d'indice :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0}\,\dot{q}^0 &= 2T \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i &= 2T - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i\right) &= 2\,\frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0}\right)
\end{aligned}$$

Réécrivons le second terme du membre de gauche :

$$\begin{aligned}
dT\left(\dot{q}^i, \dot{q}^0, q^i, q^0\right) &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\, d\dot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0}\, d\dot{q}^0 + \frac{\partial T}{\partial q^i}\, dq^i + \frac{\partial T}{\partial q^0}\, dq^0 \\
\frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\ddot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial q^0} \\
\frac{dT}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q^0} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\ddot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i
\end{aligned}$$

Injectons ces deux relations dans (194) p. 306 :

$$2\,\frac{dT}{dt}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0}\right)-\left(\frac{dT}{dt}-\frac{\partial T}{\partial q^0}\right)=Q_i\dot{q}^i$$
$$\frac{dT}{dt}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0}\right)+\frac{\partial T}{\partial q^0}=Q_i\dot{q}^i$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^0}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^0}=\frac{dT}{dt}-Q_i\dot{q}^i$$

Cette relation remplace celle de conservation de l'énergie que nous avions pour le cas holonome scléronome. L'énergie mécanique ne se conserve plus car les liaisons, variables au cours du temps, effectuent des travaux que nous ne pouvons prévoir explicitement. Nous obtenons les mêmes équations que pour le cas holonome scléronome, ainsi qu'une équation pour la composante temporelle :

$$\begin{cases}\forall i \quad ma_i = Q_i\\ ma_0=\dfrac{dT}{dt}-Q_i\dot{q}^i\end{cases}\tag{195}$$

Ces deux équations sont les équations du mouvement de M dans V_{n+1}. Si le mouvement du système a lieu sans forces extérieures exercées sur le système, les n composantes a_i sont nulles, mais a_0 est en général différent de zéro et les trajectoires du point M dans V_{n+1} ne s'interprètent pas géométriquement d'une manière simple.

24.3.2 Forces dérivant toutes d'une énergie potentielle généralisée

Supposons que toutes les forces dérivent d'une énergie potentielle généralisée $U\left(q^0,q^1,\ldots,q^n\right)$ pouvant contenir explicitement le temps q^0. Si l'on introduit le lagrangien

$$\mathscr{L}=T-U$$

les équations du mouvement du système deviennent :

$$\forall i=1,\ldots,n \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i}=0$$

La métrique de la variété V_{n+1} s'écrit :

$$\begin{aligned}d\sigma^2 &= g_{\alpha\beta}\,dq^\alpha dq^\beta\\ &= g_{ij}dq^idq^j+2\,g_{i0}\,dq^idq^0+g_{00}\,dq^0dq^0\\ &= g_{ij}dq^idq^j+g_{00}\left(dq^0\right)^2\\ &= ds^2+g_{00}\left(dq^0\right)^2\end{aligned}$$

où l'on a choisi $\forall i\ g_{i0}=0$ en prenant des vecteurs de base orthogonaux entre l'espace et le temps. Avec la relation (185) p. 298 et en faisant entrer la fonction U dans g_{00} :

$$\begin{aligned}d\sigma^2 &= \frac{2T}{m}\,dt^2+g_{00}\left(dq^0\right)^2\\ &= \frac{2T}{m}\,dt^2-\frac{2U}{m}\,dt^2\\ &= \frac{2\mathscr{L}}{m}\,dt^2\end{aligned}$$

Les formules (195) subsistent avec cette métrique à condition de remplacer les forces par leurs énergies potentielles, c'est-à-dire T par $\mathscr{L}$ et les Q_i par zéro. Les équations du mouvement du point représentatif M dans l'espace V_{n+1} doué de la nouvelle métrique s'écrivent :

$$\begin{cases} \forall i \quad a_i = 0 \\ m a_0 = \dfrac{d\mathscr{L}}{dt} \end{cases}$$

24.4 Dynamique des milieux continus

24.4.1 Les milieux continus

D'un point de vue microscopique tout milieu est composé de particules. Cependant, en prenant un volume de matière suffisamment grand, nous pouvons nous placer d'un point de vue macroscopique et supposer le milieu continu. Cette approximation est valable pour les fluides en hydrodynamique et pour les solides en théorie de l'élasticité. On utilise donc les mathématiques du continu pour modéliser un milieu physique qui ne l'est pas. Rien de nouveau en cela, en physique l'espace et le temps sont aussi supposés continus, et en mécanique classique les échanges de matière, d'énergie et de quantité de mouvement ou de moment cinétique sont supposés continus.

En relativité la notion de solide n'existe pas car elle suppose un déplacement simultané des différentes parties du solide lorsqu'il est soumis à une force. En faisant vibrer un solide on pourrait transmettre un signal avec une vitesse infinie, en désaccord avec la relativité restreinte. Pour cette raison on utilise les milieux continus en relativité.

Plaçons-nous dans un référentiel inertiel et étudions l'évolution dans le temps et dans l'espace d'une caractéristique ϕ quelconque du milieu, sa masse volumique, sa température, sa pression, sa vitesse, son accélération...

Plusieurs points de vue sont possibles :

— Dans le point de vue d'Euler on imagine un volume infinitésimal en un point fixe de notre référentiel, au travers duquel circule le milieu continu. La caractéristique ϕ du volume infinitésimal varie dans le temps mais pas dans l'espace.

— Dans le point de vue de Lagrange on choisit un volume infinitésimal de matière du milieu continu et l'on suit son évolution dans le temps et dans l'espace. La caractéristique ϕ du volume infinitésimal varie dans le temps et dans l'espace. En général la vitesse de l'élément de matière que l'on suit est fonction du temps.

— Il existe un troisième point de vue qui consiste à se placer dans le référentiel inertiel de repos instantané du volume infinitésimal de matière. Dans ce référentiel la vitesse du volume infinitésimal de matière du milieu continu est nulle, mais son accélération est en général non nulle. La caractéristique ϕ du volume infinitésimal varie dans le temps mais pas dans l'espace. C'est en fait un cas particulier du point de vue d'Euler, dans lequel le référentiel inertiel de l'observateur est choisi de façon à ce que la vitesse instantanée du milieu continu soit nulle.

24.4.2 Dérivée particulaire

Rapportons l'espace à un système de coordonnées curvilignes quelconques (x^i). Prenons le point de vue de Lagrange, et soient $v^i(t)$ les composantes contravariantes de la vitesse du volume infinitésimal de matière du milieu continu par rapport à l'observateur inertiel :

$$\begin{aligned} d\phi[x^i(t), t] &= \frac{\partial \phi}{\partial t}\, dt + \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\, dx^i(t) \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}(t) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + v^i(t)\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{grad}\, \phi \end{aligned} \tag{196}$$

La dérivée particulaire de ϕ nous dit qu'en chaque point du référentiel d'un observateur inertiel, la variation dans le temps de la caractéristique ϕ du milieu continu est due à sa variation locale (en un point fixe) dans le temps et au mouvement relatif de l'observateur par rapport au milieu continu, dans le gradient de ϕ.

L'équation (196) ne fait pas de supposition concernant l'origine de la variation locale de la caractéristique ϕ. Dans le paragraphe suivant, on explicite ce terme pour le cas de la masse volumique.

24.4.3 Équation de continuité

Nous nous plaçons dans le référentiel inertiel de repos instantané de l'élément de volume du milieu continu, cas particulier du point de vue d'Euler. La masse et la masse volumique de cet élément de volume ne sont fonction que du temps :

$$M(t) = \iiint_V \rho(t) dv$$

Le volume V d'intégration est suffisamment petit pour considérer que la matière de ce volume a un mouvement d'ensemble, autrement dit que la vitesse est bien la même en tout point de ce volume.

$$\frac{dM}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv$$

Comme il n'y a ni création ni destruction de masse dans ce volume (on suppose la conservation de la masse), la variation de masse ne peut être due qu'à un flux de matière à travers la surface S délimitant le volume V

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv = - \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$$

où $\mathbf{n}$ est la normale sortante à la surface S. Le produit scalaire d'une vitesse avec une surface orientée définit bien un volume par unité de temps. Si le terme de gauche est positif, c'est-à-dire si la masse et la masse volumique augmente avec le temps, alors de la matière entre dans la surface et le produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ est négatif. Le signe négatif devant le terme de droite le rend positif. Avec le théorème de la divergence 22.4.1 p. 254 :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv + \iiint_V \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) dv = 0$$
$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v})\right] dv = 0$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Cette équation s'appelle *équation de continuité* ou *équation de conservation de la masse*. Elle nous dit que si en un point d'un référentiel inertiel la masse volumique varie localement, alors il y a un flux de matière vers ce point (ou en éloignement).

En notation indicielle, avec l'opérateur divergence en coordonnées rectilignes (148) p. 243,

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^i} = 0} \tag{197}$$

et en coordonnées curvilignes (146) p. 243 :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i(\rho v^i) = 0} \tag{198}$$

24.4.4 Tenseur des contraintes

Pour étudier l'équilibre des forces dans un milieu continu, nous considérons un volume à face planes ayant le nombre minimal de faces planes, c'est-à-dire un tétraèdre. Pour les autres volumes, comme par exemple le cube, le système d'équations des forces est surdéterminé car l'équilibre est hyperstatique.

Rapportons l'espace à un système de coordonnées rectangulaires (x^1, x^2, x^3) et à son repère naturel orthonormé $(o, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

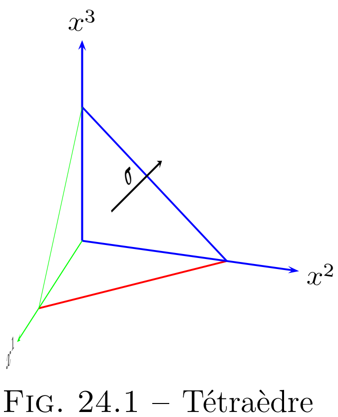


FIG. 24.1 – Tétraèdre

Soient $\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \mathbf{f}^3$ des forces extérieures par unité de surface (des pressions) s'exerçant sur chacune des trois faces identiques du tétraèdre. Elles le mettent en mouvement accéléré de rotation et de translation. Dans le cas statique, une quatrième force extérieure par unité de surface $\mathbf{F}$ maintient le tétraèdre immobile. Le tétraèdre étant supposé à l'équilibre, la somme des forces extérieures s'exerçant sur lui est nulle :

$$\mathbf{F}s + \mathbf{f}^1 s_1 + \mathbf{f}^2 s_2 + \mathbf{f}^3 s_3 = \mathbf{0} \tag{199}$$
$$\mathbf{F} + \mathbf{f}^1 s_1/s + \mathbf{f}^2 s_2/s + \mathbf{f}^3 s_3/s = \mathbf{0}$$

Les surfaces s_i sont les projections de la surface s sur les plans coordonnées. Soit $\boldsymbol{\sigma}$ le vecteur unitaire sortant normal à la face inclinée, de composantes covariantes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} + \mathbf{f}^1(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_1) + \mathbf{f}^2(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_2) + \mathbf{f}^3(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_3) &= \mathbf{0}\\ \mathbf{F} + \mathbf{f}^1\sigma_1 + \mathbf{f}^2\sigma_2 + \mathbf{f}^3\sigma_3 &= \mathbf{0}\\ \mathbf{F} + \mathbf{f}^i\sigma_i &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Les trois vecteurs unitaires sortants normaux aux surfaces $\boldsymbol{n}_i = -\mathbf{e}_i$ forment une base orthonormée. La pression $\mathbf{f}^1$ qui s'exerce sur la face (x^2, x^3) a pour expression :

$$\begin{aligned}\mathbf{f}^1 &= t^{11}\boldsymbol{n}_1 + t^{12}\boldsymbol{n}_2 + t^{13}\boldsymbol{n}_3\\ &= t^{1j}\boldsymbol{n}_j\\ &= -t^{1j}\mathbf{e}_j\end{aligned}$$

où t^{1j} est homogène à une pression. Avec cette convention de signe pour les composantes, le vecteur $\mathbf{f}^1$ a pour composantes une fois contravariantes t^{1j} dans la base $(\boldsymbol{n}_j)$ et $-t^{1j}$ dans la base $(\mathbf{e}_j)$. Pour l'ensemble des forces :

$$\forall i = 1,2,3 \quad \mathbf{f}^i = -t^{ij}\mathbf{e}_j$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -\mathbf{f}^i\sigma_i\\ F^j\mathbf{e}_j &= t^{ij}\sigma_i\mathbf{e}_j\\ \forall j = 1,2,3 \quad F^j &= t^{ij}\sigma_i\end{aligned}$$

Donc, dans la base naturelle $(\mathbf{e}_j)$ la force par unité de surface $\mathbf{F}$ a pour composantes contravariantes $t^{ij}\sigma_i$. Les F^j sont des composantes contravariantes et les σ_i des composantes covariantes, d'après le critère de tensorialité 20.9.2 p. 211, les t^{ij} sont les composantes deux fois contravariantes d'un tenseur appelé *tenseur des contraintes*.

Remarque 50. *Vérifions-le en effectuant le changement de coordonnées de x^i à $x^{i'}$, auquel correspond le changement de base naturelle :*

$$\forall j = 1,2,3 \quad \mathbf{e}_j = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\mathbf{e}_{k'}$$

La force par unité de surface se transforme selon :

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= t^{ij}\sigma_i\mathbf{e}_j\\ &= t^{ij}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j\\ &= t^{ij}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i}\mathbf{e}_{l'}\right)\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\mathbf{e}_{k'}\\ &= t^{ij}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_{l'})\mathbf{e}_{k'}\end{aligned}$$

Or la force exercée sur la surface S ne dépend pas du système de coordonnées (la force est un vecteur) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'$$

$$t^{ij}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_{l'})\mathbf{e}_{k'} = t^{k'l'}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_{l'})\mathbf{e}_{k'}$$

$$\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}t^{ij} = t^{k'l'}$$

D'après le théorème 20.7.1 p. 202, la matrice 3×3 des t^{ij} est un tenseur deux fois contravariant.

Cherchons l'expression de la force infinitésimale :

$$F^j \mathbf{e}_j = t^{ij} \sigma_i \mathbf{e}_j$$
$$F^j \mathbf{e}_j S = t^{ij} S_i \mathbf{e}_j$$
$$F^j \mathbf{e}_j ds = t^{ij} ds_i \mathbf{e}_j$$
$$\forall j = 1,2,3 \quad F^j ds = t^{ij} ds_i \tag{200}$$

Lorsque le fluide est parfait (ni transfert de chaleur ni viscosité en cisaillement ou en traction-compression) le tenseur des contraintes devenu tenseur des pressions prend la forme suivante,

$$\forall i,j \quad t^{ij} = pg^{ij} \tag{201}$$

où le scalaire p est la pression du fluide au point et à l'instant considéré, et où les g^{ij} sont les composantes du tenseur métrique dans le système de coordonnées choisi. Lorsque ce dernier est orthogonal, le tenseur métrique est diagonal ainsi que celui des pressions.

24.5 Équations de la dynamique des milieux continus

On considère un élément de matière du milieu continu, de surface fermée ds, de volume dv et de masse volumique ρ. On utilise un système de coordonnées rectangulaires et on se place dans le référentiel inertiel de repos instantané de cet élément de matière. On note $\mathbf{f}_v$ la somme des forces extérieures par unité de volume des forces de volume (forces électromagnétiques et gravitationnelles) et $\sum \mathbf{f}^i$ la somme des forces extérieures par unité de surface des forces surfaciques, les forces s'exerçant sur l'élément de matière. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\mathbf{f}_v dv + \mathbf{f}^i ds_i = \boldsymbol{\gamma} \rho dv$$

avec (199) p. 310 :

$$\mathbf{f}_v dv - \mathbf{F} ds = \boldsymbol{\gamma} \rho dv$$

En notation indicielle :

$$\forall i = 1,2,3 \quad f^i dv - F^i ds = \rho \gamma^i dv$$

avec (200) p. 312 :

$$\forall i = 1,2,3 \quad f^i dv - t^{ki} ds_k = \rho \gamma^i dv$$

Intégrons sur un volume V quelconque, de surface S :

$$\forall i \quad \iiint_V \left(f^i - \rho\gamma^i\right) dv - \iint_S t^{ki} ds_k = 0$$

En utilisant le théorème de la divergence 22.4.1 p. 254 dans un système de coordonnées rectilignes :

$$\forall i \quad \iiint_V \left(f^i - \rho\gamma^i - \partial_k t^{ki}\right) dv = 0$$
$$f^i - \partial_k t^{ki} = \rho \gamma^i \tag{202}$$

qui sont les équations de la dynamique des milieux continus en coordonnées rectilignes. Elles sont homogènes à une force par unité de volume.

La somme des moments des forces extérieures est égale au moment des forces d'inertie :

$$\boldsymbol{r} \times (\mathbf{f_v} dv - \mathbf{F} ds) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\gamma} \rho dv$$
$$\boldsymbol{r} \times (\mathbf{f_v} - \boldsymbol{\gamma}\rho) dv - \boldsymbol{r} \times \mathbf{F} ds = 0$$

En notation indicielle et en intégrant sur un volume quelconque V de surface S :

$$\forall i, j \quad \iiint_V \left[x^i \left(f^j - \rho\gamma^j\right) - x^j \left(f^i - \rho\gamma^i\right)\right] dv - \iint_S \left(x^i t^{kj} - x^j t^{ki}\right) ds_k = 0$$

En utilisant le théorème de la divergence 22.4.1 p. 254 :

$$\forall i, j \quad \iiint_V \left[x^i \left(f^j - \rho\gamma^j - \partial_k t^{kj}\right) - x^j \left(f^i - \rho\gamma^i - \partial_k t^{ki}\right)\right] dv - \iiint_V \left(t^{ij} - t^{ji}\right) dv = 0$$

Les relations (202) montrent que la première intégrale est nulle :

$$\forall i, j \quad \iiint_V \left(t^{ij} - t^{ji}\right) dv = 0$$
$$t^{ij} = t^{ji}$$

Le tenseur des contraintes est donc symétrique par rapport à ses deux indices.

24.5.1 Écriture des équations en fonction de l'impulsion

Les relations (202) p. 312 peuvent s'écrire en fonction de la densité volumique d'impulsion. Écrivons l'accélération (138) p. 237 dans un système de coordonnées rectilignes où les symboles de Christoffel sont nuls (21.4.6 p. 226), puis utilisons les relations (196) p. 309 :

$$\forall i \quad \gamma^i = \frac{dv^i}{dt}$$
$$= \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k \partial_k v^i$$

La vitesse de l'élément de matière varie localement et il existe un gradient de vitesse dans le milieu continu.

En vue de passer au cas relativiste, plaçons-nous dans le référentiel inertiel instantané $\mathcal{R}_0$ au repos par rapport à l'élément de matière du milieu continu. La vitesse relative est nulle :

$$\forall i \quad \gamma^i = \frac{\partial v^i}{\partial t}$$
$$\forall i \quad \rho\gamma^i = \frac{\partial \left(\rho v^i\right)}{\partial t} - v^i \frac{\partial \rho}{\partial t}$$
$$= \frac{\partial \left(\rho v^i\right)}{\partial t}$$

où l'on utilise une seconde fois le fait que les v^i sont nulles dans le référentiel propre du milieu continu. Les équations de la dynamique des milieux continus en coordonnées rectilignes (202) p. 312 par unité de volume s'écrivent en fonction de l'impulsion :

$$\forall i \quad f^i - \partial_k t^{ki} = \partial_t (\rho v^i)$$

Soit $\bar{\mathbf{p}}$ le trivecteur impulsion par unité de volume non relativiste, de composantes contravariantes :

$$\forall i \quad \bar{p}^i \triangleq \rho v^i \tag{203}$$

Les équations de la dynamique et l'équation de continuité (197) p. 310 s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_i \overline{p}^i = 0 \\ \partial_t \overline{p}^i + \partial_k t^{ki} = f^i \qquad \forall i = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{204}$$

24.5.2 Forme générale des équations de la dynamique des milieux continus

Généralisons les relations (202) p. 312 à un système de coordonnées curvilignes. Les équations tensorielles

$$\forall i \quad f^i - \nabla_k t^{ki} = \rho \gamma^i \tag{205}$$

sont invariantes par changement de coordonnées et redonnent les relations (202) pour un système de coordonnées rectilignes. Ce sont donc les équations de la dynamique des milieux continus dans un système de coordonnées curvilignes arbitraires.

24.5.3 Écriture des équations générales en fonction de l'impulsion

Écrivons ces équations en fonction de l'impulsion. Les relations (138) p. 237 donnent l'accélération en fonction de la vitesse :

$$\begin{aligned} \forall i \quad \gamma^i &= \frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i{}_{kj} v^k v^j \\ &= \partial_t v^i + v^k \partial_k v^i + \Gamma^i{}_{kj} v^k v^j \\ &= \partial_t v^i + v^k \left(\partial_k v^i + \Gamma^i{}_{kj} v^j \right) \end{aligned}$$

En multipliant par la masse volumique et avec la définition 21.8.1 p. 234 de la dérivée covariante :

$$\begin{aligned} \forall i \quad \rho \gamma^i &= \rho \partial_t v^i + \rho v^k \nabla_k v^i \\ &= \frac{\partial \left(\rho v^i \right)}{\partial t} - v^i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_k \left(\rho v^k v^i \right) - v^i \nabla_k \left(\rho v^k \right) \\ &= \frac{\partial \left(\rho v^i \right)}{\partial t} + \nabla_k \left(\rho v^k v^i \right) - v^i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_k \left(\rho v^k \right) \right] \end{aligned}$$

Avec l'équation de continuité (198) p. 310 le dernier terme est nul :

$$\forall i \quad \rho \gamma^i = \partial_t \left(\rho v^i \right) + \nabla_k \left(\rho v^k v^i \right)$$

Les équations de la dynamique des milieux continus en coordonnées curvilignes (205) s'écrivent en fonction de l'impulsion :

$$\forall i \quad \partial_t \left(\rho v^i \right) + \nabla_k \left(\rho v^k v^i + t^{ki} \right) = f^i \tag{206}$$

Ces trois équations et celle de continuité déterminent la dynamique des milieux continus sous l'action de forces de volume et de surface. Il reste à remplacer les t^{ki} et les f^i par des modèles de forces.

25

Relativité restreinte

25.1 La transformation de Lorentz

25.1.1 Transformation de Galilée

En physique non relativiste, pour passer des coordonnées spatiales et temporelle d'un point dans un référentiel galiléen aux coordonnées du même point dans un autre référentiel galiléen, c'est-à-dire pour effectuer un changement de référentiel galiléen, nous utilisons la transformation de Galilée. Pour deux référentiels en configuration standard :

$$x' = x - v_e t \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad ; \quad t' = t$$

Appliquons cette transformation à l'équation de la sphère de lumière dans $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 t'^2 \\ (x - v_e t)^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \\ x^2 - 2x v_e t + v_e^2 t^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \end{aligned} \tag{207}$$

Ce n'est plus une sphère dans $\mathcal{R}$ à cause des termes supplémentaires $-2x v_e t$ et $v_e^2 t^2$.

25.1.2 Transformation spéciale de Lorentz

Au paragraphe 9.3 p. 74, nous avons vu que l'équation de la sphère de lumière est invariante par changement de référentiel (changement de coordonnées spatio-temporelles). À partir de (207), pour obtenir une sphère nous ne pouvons pas garder $t' = t$ si nous voulons éliminer le terme croisé $-2x v_e t$. On essaye alors la transformation la plus simple envisageable,

$$x' = x - v_e t \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad ; \quad t' = t + Kx$$

où K est une constante qu'il faut déterminer. Appliquons cette transformation à l'équation (207) de la sphère de lumière dans $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x v_e t + v_e^2 t^2 + y^2 + z^2 &= c^2 (t + Kx)^2 \\ &= c^2 t^2 + 2c^2 K x t + c^2 K^2 x^2 \\ x^2 \left(1 - c^2 K^2\right) - 2xt \left(v_e + c^2 K\right) + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \left(1 - v_e^2 / c^2\right) \end{aligned}$$

Pour éliminer le terme en xt on pose $v_e + c^2K = 0$, soit $K = -v/c^2$. La transformation et l'équation dans $\mathcal{R}$ deviennent,

$$x' = x - v_e t \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad ; \quad t' = t - v_e x/c^2$$
$$x^2\left(1 - v_e^2/c^2\right) + y^2 + z^2 = c^2t^2\left(1 - v_e^2/c^2\right)$$

Pour obtenir l'équation d'une sphère dans $\mathcal{R}$ nous devons diviser x' et t' par le terme constant $\sqrt{1 - v_e^2/c^2}$.

Définition 25.1.1. *Facteur relativiste*
On définit le facteur relativiste ou facteur de Lorentz ou encore coefficient de parallaxe spatio-temporelle par :

$$\gamma(v_e) \triangleq \frac{1}{\sqrt{1 - v_e^2/c^2}}$$

$\gamma(v_e)$ est noté γ_e. Ce facteur est sans dimension. Pour toute vitesse relative, c'est-à-dire pour tout couple de référentiels ou d'observateurs, il existe un facteur relativiste. Lorsque il y a plusieurs vitesses relatives il faut préciser de quel facteur relativiste il s'agit. De plus :

$$0 \leqslant v_e \leqslant c \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma_e \geqslant 1 \tag{208}$$

La transformation devient

$$\begin{cases} t' = \gamma_e\left(t - v_e x/c^2\right) \\ x' = \gamma_e\left(x - v_e t\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

appelée *transformation spéciale de Lorentz-Poincaré*. La transformation est dite « spéciale » parce qu'elle n'inclue pas les rotations statiques ordinaires de l'espace. Elle est obtenue ici grâce à l'hypothèse de l'invariance de c (qui entraine celle de l'équation de la sphère de lumière) et grâce à la transformation de Galilée en considérant un mouvement de $\mathcal{R}'$ dans le sens des x croissants. La transformation de Lorentz-Poincaré s'écrit :

$$\begin{cases} t' = \gamma_e\left(t - v_e x/c^2\right) \\ x' = \gamma_e\left(x - v_e t\right) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} ct' = \gamma_e\left(ct - xv_e/c\right) \\ x' = \gamma_e\left(x - ctv_e/c\right) \end{cases}$$

La transformation de Lorentz-Poincaré est symétrique en x et ct. On pose

$$\beta_e = v_e/c$$

$$\begin{cases} ct' = \gamma_e(ct - \beta_e x) \\ x' = \gamma_e(x - \beta_e ct) \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_e\beta_e & \gamma_e \\ \gamma_e & -\gamma_e\beta_e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Notation 28. *Matrice de Lorentz*
La matrice changement relativiste de référentiel galiléen, ou matrice de Lorentz, est notée avec la lettre grecque lambda majuscule en l'honneur de Lorentz :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\gamma_e\beta_e & \gamma_e \\ \gamma_e & -\gamma_e\beta_e \end{bmatrix}$$

On a la transformation inverse en changeant β_e en $-\beta_e$ et en permutant les coordonnées :

$$ct = \gamma_e\left(ct' + \beta_e x'\right) \quad ; \quad x = \gamma_e\left(x' + \beta_e ct\right) \quad ; \quad y = y' \quad ; \quad z = z'$$

25.2 Quadrivitesse

Définissons le temps propre τ comme le temps qui s'écoule dans le référentiel du point matériel.

Définition 25.2.1. *Temps propre*
Le temps propre d'un référentiel est le temps indiqué par une horloge fixe dans ce référentiel.

L'intervalle de temps propre, ou durée propre, entre deux évènements, est la durée mesurée dans le référentiel dans lequel les deux évènements ont lieu au même endroit ($dx = dy = dz = 0$). Le choix d'écriture du carré de la métrique (30) p. 76 donne un ds réel :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2$$
$$ds = \pm c d\tau$$

où $d\tau$ et c sont toujours positifs. On choisit ds positif, le sens de parcours se fait dans le sens de l'écoulement du temps :

$$ds = c d\tau \tag{210}$$

L'intervalle s est égal au temps propre au facteur c près, dans la convention de signe (30) p. 76 choisie pour la métrique. Le temps propre d'une particule est la mesure de la quadridistance qu'elle parcourt dans l'espace-temps.

En revanche, le temps t dans un référentiel quelconque est arbitraire au même titre que les coordonnées spatiales. Il dépend de notre choix de référentiel. On l'appelle alors *temps coordonnée.*

Dans l'espace-temps de Poincaré-Minkowski on considère un point matériel en mouvement avec une vitesse inférieure à c, donc pour lequel $ds^2 > 0$. Ce mouvement peut être défini par la donnée des coordonnées galiléennes réduites x^α ((9) p. 24) de ce point en fonction d'un paramètre. Prenons pour paramètre le temps propre τ, c'est-à-dire l'intervalle s au facteur c près. Nous avons alors $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$, où les indices grecs varient de 0 à 3.

Définition 25.2.2. *Quadrivitesse*
Le quadrivecteur vitesse d'univers, aussi appelé quadrivitesse, vitesse spatio-temporelle, vitesse quadridimentionnelle, ou encore 4-vitesse, est défini par :

$$\forall\alpha \quad u^\alpha \triangleq \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

Dans le système de coordonnées galiléennes réduites (pseudo-orthonormées), sa pseudo-norme vaut :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|^2 &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\\
&= \eta_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta\\
&= \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx^1}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{d\tau}\right)^2\\
&= \frac{ds^2}{d\tau^2}\\
&= c^2
\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{cases} u^0 = \dfrac{dx^0}{d\tau} \\ u^i = \dfrac{dx^i}{d\tau}\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} u^0 = c\,\dfrac{dt}{d\tau} \\ u^i = v^i\,\dfrac{dt}{d\tau}\end{cases}$$

où les indices latins varient de 1 à 3. La relation (30) p. 76 donne

$$\begin{aligned}
ds^2 &= c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\\
\frac{ds^2}{dt^2} &= c^2 - v^2\\
\frac{ds}{dt} &= \sqrt{c^2 - v^2}\\
\frac{dt}{ds} &= \frac{1}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}\\
\frac{dt}{d\tau} &= \gamma(v)
\end{aligned} \tag{211}$$

où l'on s'est servi de la définition 25.1.1 p. 316 du facteur relativiste γ. Si bien que la quadrivitesse s'écrit :

$$\begin{cases} u^0 = c\gamma(v) \\ u^i = \gamma(v)v^i \end{cases} \tag{212}$$

NOTATION 29. *On note ∂_α la dérivée partielle par rapport à la coordonnée galiléenne réduite x^α.*

$$\begin{aligned}
\partial_0 u^0 &= \frac{cd\gamma(v)}{dx_0} = \frac{d}{dt}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\
&= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \times -\frac{1}{c^2}\frac{dv^2}{dt} \\
&= \frac{\gamma_v^3}{2c^2}\frac{dv^2}{dt} = \frac{\gamma_v^3}{2c^2}\frac{d}{dt}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right) \\
&= \frac{\gamma_v^3}{2c^2}\left(2v_x\frac{dv_x}{dt}+2v_y\frac{dv_y}{dt}+2v_z\frac{dv_z}{dt}\right) \\
&= \frac{\gamma_v^3}{c^2}\,\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\gamma_v^4}{c^2}\,\vec{v}\cdot\vec{a}
\end{aligned}$$

Dans le référentiel inertiel au repos instantané $\mathcal{R}_0$ le vecteur vitesse d'espace est nul $\forall i,\ v^i = 0$ et $\gamma(v) = 1$:

$$\begin{cases} u^0 = c \\ u^i = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \partial_0 u^0 = 0 \tag{213}$$

D'après la définition 23.2.1 p. 266 le point matériel décrit une géodésique de l'espace-temps de métrique (30) p. 76. Nous pouvons à présent écrire le principe d'inertie en relativité restreinte :

Un point matériel isolé admet pour trajectoire d'univers une géodésique de l'espace de Poincaré-Minkowski pour laquelle le ds^2 est positif (dans la convention choisie).

Les géodésiques pour lesquelles $ds^2 = 0$ sont parcourues à la vitesse c, elles correspondent aux rayons lumineux si l'on suppose que la lumière se propage à la vitesse limite. Elles sont dites *nulles* ou *isotropes*.

25.3 QUADRI-IMPULSION

25.3.1 Impulsion relativiste

La masse inerte d'un système mesurée dans le référentiel propre de ce système, notée simplement m (parfois m_0) ne peut être qu'*absolue*. Elle est appelée *masse propre*, *masse intrinsèque*, *masse au repos* ou simplement *masse*.

DÉFINITION 25.3.1. *Inertie*
L'inertie d'un système de vélocité $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen est le produit de la masse propre de ce système par le facteur relativiste lié à sa vélocité :

$$I(v) \triangleq \gamma_v m$$

Définition 25.3.2. *Quantité de mouvement relativiste*
Le trivecteur quantité de mouvement relativiste ou impulsion relativiste est le produit :

$$\begin{aligned}\vec{p} &\triangleq \gamma_v m\vec{v} \\ &\triangleq I\vec{v} \\ &\triangleq m\vec{u}\end{aligned} \tag{214}$$

$$\vec{p}\begin{pmatrix} mu^x \\ mu^y \\ mu^z \end{pmatrix}$$

Remarque 51. *À faible vitesse devant c ou lorsque c tend vers l'infini, $m\vec{u}$ tend vers $m\vec{v}$, le trivecteur quantité de mouvement non relativiste.*

Définition 25.3.3. *Quadri-impulsion*
La quadri-impulsion d'un système dans $\mathcal{R}$ est le produit de sa masse (propre) par sa quadrivitesse dans $\mathcal{R}$ (212) p. 318 :

$$\boldsymbol{p} \triangleq m\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{p}\begin{pmatrix} m\gamma_v c \\ mu^x \\ mu^y \\ mu^z \end{pmatrix}$$

La quadri-impulsion généralise à l'espace-temps l'impulsion relativiste purement spatiale en lui ajoutant une composante temporelle.

25.3.2 Énergie relativiste

Pour faire le lien avec la mécanique non relativiste, prenons une vitesse v petite devant la vitesse limite c. Le facteur relativiste γ_v tendant vers un, l'inertie tend vers la masse. La partie spatiale du quadrivecteur impulsion, c'est-à-dire la quantité de mouvement relativiste $\vec{p}$, tend vers la quantité de mouvement non relativiste $m\vec{v}$.

Pour la partie temporelle, à faible vitesse nous devons prendre le développement limité de

$$\gamma_v = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

pour $v \ll c$, donc pour v^2/c^2 proche de zéro :

$$\gamma_v \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \dots$$

Notons p_t la composante temporelle de la quadri-impulsion :

$$\begin{aligned} p_t &= \gamma_v mc \\ p_t c &= \gamma_v mc^2 \\ &\approx mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{3mv^4}{8c^2} + \dots \end{aligned}$$

La multiplication par c nous a fait passer du domaine des impulsions au domaine des énergies. À faible vitesse le deuxième terme $E_{cin} = mv^2/2$ se confond avec l'énergie cinétique de la mécanique non relativiste. Le premier terme mc^2 est une énergie constante qui existe aussi à vitesse nulle, donc dans le référentiel propre.

DÉFINITION 25.3.4. *Énergie au repos*
L'énergie au repos d'un système, ou énergie propre, ou énergie de masse est le produit de sa masse par c^2 :

$$E_0 \triangleq mc^2$$

E_0 n'existe pas en mécanique non relativiste parce que l'on ne mesure ou calcule que des différences d'énergie. Au facteur c^2 près, que l'on peut prendre égal à l'unité, l'énergie au repos est la masse (inerte au repos) de la particule. Faire la différence entre ces deux notions revient à faire la différence entre un prix en dollars et un prix en euros avec un taux de change fixe.

DÉFINITION 25.3.5. *Énergie cinétique relativiste*
L'énergie cinétique relativiste est toute l'énergie due au mouvement relatif, donc l'ensemble des termes contenant v :

$$\begin{aligned} T &\triangleq \frac{mv^2}{2} + \frac{3mv^4}{8c^2} + \dots \\ &\triangleq (\gamma_v - 1)\, mc^2 \end{aligned}$$

REMARQUE 52. *Lorsque la vitesse tend vers c le facteur relativiste γ_v tend vers l'infini et donc l'énergie cinétique tend aussi vers l'infini. Il existe une vitesse limite mais pas une énergie cinétique limite.*

DÉFINITION 25.3.6. *Énergie totale relativiste*
L'énergie totale est la somme de l'énergie au repos et de l'énergie cinétique relativiste :

$$\begin{aligned} E &\triangleq E_0 + T \\ &= \gamma_v mc^2 \\ &= Ic^2 \end{aligned} \tag{215}$$

Au facteur c^2 près, que l'on peut prendre égal à l'unité, l'énergie totale relativiste du système est son inertie.

25.3.3 Quadri-impulsion

La définition 25.3.3 p. 320 de la quadri-impulsion est homogène à une quantité de mouvement :

$$\boldsymbol{p}\,(Ic, \vec{p}) \tag{216}$$

La multiplier par c la rend homogène à une énergie, pour former la « quadri-énergie » :

$$\boldsymbol{E}\,(E, c\vec{p})$$

Elle n'est jamais homogène aux deux en même temps, sauf lorsque $c = 1$. Diviser la quadri-impulsion par c la rend homogène à une masse, pour former la « quadri-inertie » :

$$\boldsymbol{I}\left(I, \frac{\vec{p}}{c}\right)$$

Nous devrions l'appeler quadrivecteur inertie-énergie-impulsion, mais nous retiendrons le terme quadri-impulsion.

Les relations $\vec{p} = I\vec{v}$ et $E = Ic^2$ donnent la nouvelle relation :

$$c^2\vec{p} = E\vec{v}$$

De part leur définition, l'énergie totale est liée à l'énergie au repos et à la quantité de mouvement relativiste :

$$\gamma_v^2(v) = \frac{1}{1-\beta^2}$$
$$\gamma_v^2 - \gamma_v^2 v^2/c^2 = 1$$
$$\gamma_v^2 m^2 c^4 - \gamma_v^2 v^2 m^2 c^2 = m^2 c^4$$

$$E^2 = E_0^2 + p^2c^2 \tag{217}$$

25.3.4 Conservation de la quadri-impulsion

Comme tout quadrivecteur, la quadri-impulsion est *invariante par changement de référentiel galiléen*, mais cela ne signifie pas que la somme des quadri-impulsions *se conserve lors d'une interaction*, autrement dit que la quadri-impulsion d'un système isolé *se conserve dans le temps*. À basse vitesse elle donne l'énergie cinétique et la quantité de mouvement, deux quantités qui se conservent lors d'une interaction en mécanique non relativiste (l'énergie d'agitation thermique est une forme d'énergie cinétique).

On vérifie expérimentalement mais on ne peut démontrer que la quadri-impulsion se conserve lors d'une interaction. Soient deux systèmes de quadri-impulsion $\boldsymbol{p}_1$ et $\boldsymbol{p}_2$. Par hypothèse basée sur l'expérience :

$$\forall \alpha = 0, \ldots, 3 \qquad p_1^\alpha + p_2^\alpha = p_1'^\alpha + p_2'^\alpha$$

(1) La partie temporelle donne la conservation de l'inertie et non plus de la masse inerte. Avec la relation (216) p. 321 :

$$p_1^0 + p_2^0 = p_1'^0 + p_2'^0$$
$$I_1c + I_2c = I_1'c + I_2'c$$
$$I_1 + I_2 = I_1' + I_2'$$

L'inertie $I(v)$ d'une particule, donc son énergie totale $E = Ic^2$, n'est pas invariante par changement de référentiel par la transformation de Lorentz-Poincaré puisque fonction de la vitesse, mais la somme des inerties (donc des énergies totales) est conservée par hypothèse lors d'une interaction.

Réciproquement, la masse m d'une particule, donc son énergie au repos $E_0 = mc^2$, est absolue puisqu'elle n'est définie que dans le référentiel propre de la particule, mais la somme des masses (donc des énergies au repos) ne se conserve pas lors d'une interaction puisque c'est la somme des énergies totales qui se conserve.

(2) La partie spatiale donne la conservation de la quantité de mouvement relativiste selon chaque axe :

$$\begin{array}{lcl} p_1^1 + p_2^1 = p_1'^1 + p_2'^1 & \Rightarrow & p_{x_1} + p_{x_2} = p'_{x_1} + p'_{x_2} \\ p_1^2 + p_2^2 = p_1'^2 + p_2'^2 & \Rightarrow & p_{y_1} + p_{y_2} = p'_{y_1} + p'_{y_2} \\ p_1^3 + p_2^3 = p_1'^3 + p_2'^3 & \Rightarrow & p_{z_1} + p_{z_1} = p'_{z_1} + p'_{z_1} \end{array}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

La conservation de la quantité de mouvement est remplacée par la conservation de la quantité de mouvement relativiste, l'inertie $I(v) = \gamma_v m$ remplaçant la masse inerte m.

La quantité de mouvement relativiste d'une particule n'est pas invariante par changement de référentiel galiléen par la transformation de Lorentz-Poincaré puisque fonction de la vitesse, mais par hypothèse la somme des quantités de mouvement relativistes se conserve lors d'une interaction.

25.4 Dynamique relativiste des milieux continus

Nous nous plaçons dans un référentiel inertiel $\mathcal{R}_0$ au repos par rapport au milieu en un lieu et à un instant précis, c'est-à-dire en un point d'univers donné (évènement P_0). En ce point les composantes du vecteur vitesse relative d'espace du milieu dans le référentiel sont nulles, en revanche les dérivées de ces composantes peuvent être non nulles. Nous choisissons un système de coordonnées rectangulaires.

En dynamique relativiste toutes les formes d'énergie apportent leur contribution au quadrivecteur énergie-impulsion. Or les énergies s'additionnent, nous devons donc raisonner en termes d'énergie. Dans les équations de la dynamique des milieux continus non relativistes (204) p. 314, le vecteur impulsion volumique non relativiste $\bar{\mathbf{p}}$ ne contient que le terme de masse volumique correspondant à l'énergie de masse. Pour faire apparaitre l'énergie de masse multiplions la définition du trivecteur impulsion volumique non relativiste (203) p. 313 par c^2 (on utilise $E = mc^2$) :

$$\forall i \quad c^2 \bar{p}^i = \rho c^2 v^i$$

où ρ est la masse volumique propre, celle mesurée dans le référentiel propre $\mathcal{R}_0$. Pour former le quadrivecteur énergie-impulsion relativiste nous devons prendre en compte l'énergie des contraintes mécanique. En revanche nous supposons l'absence de champ électromagnétique.

Le travail par unité de temps de la force de contrainte est son produit scalaire euclidien par la vitesse de l'élément de matière considéré. À partir de (200) p. 312 :

$$v_j F^j ds = v_j t^{ij} ds_i$$

> Remarque 53. *Les composantes covariante v_j sont nulles mais la substitution se fera à la fin. De même que lorsque l'on écrit la relation fondamentale de la dynamique $\sum \boldsymbol{F} = d(m\boldsymbol{v})/dt$ la vitesse peut être nulle sans que l'accélération le soit.*

Au terme $c^2 \rho v^i$ homogène à une énergie par unité de temps et de surface correspond le terme de mêmes dimensions $v_j t^{ij}$. La partie spatiale du quadrivecteur densité volumique d'impulsion relativiste $\mathbf{p}$ a alors pour composantes contravariantes :

$$\forall i \quad p^i = \rho v^i - \frac{1}{c^2} t^{ij} v_j$$

Le signe négatif vient de ce que les composantes covariantes de la vitesse sont négatives dans la métrique $(+---)$ de la relativité (voir l'exemple 17.3 p. 146).

Exemple 25.4.1. *La pression p est homogène à une densité volumique d'énergie. En mécanique non relativiste, l'énergie contenue dans un volume élémentaire de fluide parfait à la pression p a pour expression*

$$E = pdv$$

qui donne

$$\begin{aligned} Ev^i &= pv^i dv \\ &= pg^{ij}v_j dv \\ &= t^{ij}v_j dv \end{aligned}$$

En relativité, avec une signature $(+---)$, l'énergie contenue dans ce même volume élémentaire a pour expression

$$E = \rho dvc^2 + pdv$$

qui donne

$$\begin{aligned} Ev^i &= (\rho c^2 v^i + pv^i)dv \\ \frac{Ev^i}{c^2} &= \left(\rho v^i + \frac{1}{c^2}\, pg^{ij}v_j\right) dv \\ p^i &= \left(\rho v^i - \frac{1}{c^2}\, t^{ij}v_j\right) dv \end{aligned}$$

Les composantes spatiales du quadrivecteur $\mathbf{p}$ sont nulles en P_0 mais il n'en est pas de même de leurs dérivées. Les équations non relativistes (204) p. 314 deviennent :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_i \left(\rho v^i - \dfrac{1}{c^2}\, t^{ij}v_j\right) = 0 \\ \partial_t \left(\rho v^i - \dfrac{1}{c^2}\, t^{ij}v_j\right) + \partial_k t^{ki} = f^i \qquad \forall i = 1,2,3 \end{cases}$$

En tenant compte de la nullité des v^i en P_0 :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \rho \partial_i v^i - \dfrac{1}{c^2}\, \partial_i t^{ij}v_j = 0 \\ \rho \partial_t v^i - \dfrac{1}{c^2}\, \partial_t t^{ij}v_j + \partial_k t^{ki} = f^i \qquad \forall i = 1,2,3 \end{cases}$$

Introduisons la variable $x^0 = ct$:

$$\begin{cases} c\partial_0 \rho + \rho \partial_i v^i - \dfrac{1}{c^2}\, \partial_i t^{ij}v_j = 0 \\ c\rho \partial_0 v^i - \dfrac{1}{c}\, \partial_0 t^{ij}v_j + \partial_k t^{ki} = f^i \qquad \forall i = 1,2,3 \end{cases} \tag{218}$$

25.5 Forme tensorielle des équations du mouvement

Il s'agit d'écrire les relations (218) dans l'espace-temps de la relativité, c'est-à-dire sous forme de quadri-tenseurs et quadrivecteurs. Nous introduisons le quadri-tenseur d'univers symétrique $\boldsymbol{T}$ de composantes deux fois contravariantes $T^{\alpha\beta}$ qui généralise le tenseur des contraintes du paragraphe 24.4.4 p. 310. Dans le référentiel inertiel de repos instantané $\mathcal{R}_0$ et au point d'univers P_0, ce tenseur a pour composantes :

$$\forall i,k \quad T^{ik} = t^{ik} \qquad ; \qquad \forall i \quad T^{i0} = T^{0i} = T^{00} = 0$$

Les indices latins varient de 1 à 3, les indices grecs de 0 à 3, l'indice 0 étant la composante temporelle. Nous introduisons également le quadrivecteur force d'univers par unité de volume, qui a pour composantes dans $\mathcal{R}_0$ en P_0 :

$$\forall i \quad \phi^i = f^i \qquad ; \qquad \phi^0 = 0$$

ainsi que le quadrivecteur vitesse d'univers (212) p. 318

$$\forall i \quad u^i = \gamma v^i \qquad ; \qquad u^0 = \gamma c$$

qui a pour composantes dans $\mathcal{R}_0$ en P_0 :

$$\forall i \quad u^i = 0 \qquad ; \qquad u^0 = c$$

Montrons que les équations (218) s'écrivent

$$\boxed{\forall \alpha \quad \nabla_\beta \left(\rho u^\alpha u^\beta + T^{\alpha\beta}\right) = \phi^\alpha} \tag{219}$$

équivalent au système d'équations :

$$\begin{cases} \nabla_\beta \left(\rho u^0 u^\beta + T^{0\beta}\right) = \phi^0 \\ \nabla_\beta \left(\rho u^i u^\beta + T^{i\beta}\right) = \phi^i \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \nabla_\beta \left(\rho u^0 u^\beta\right) + \nabla_k T^{0k} + \nabla_0 T^{00} = 0 \\ \nabla_\beta \left(\rho u^i u^\beta\right) + \nabla_0 T^{i0} + \nabla_k T^{ik} = f^i \end{cases}$$

En coordonnées rectangulaires :

$$\begin{cases} \partial_\beta \left(\rho u^0 u^\beta\right) + \partial_k T^{0k} + \partial_0 T^{00} = 0 \\ \partial_\beta \left(\rho u^i u^\beta\right) + \partial_0 T^{i0} + \partial_k T^{ik} = f^i \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^0 u^\beta \partial_\beta \rho + \rho u^\beta \partial_\beta u^0 + \rho u^0 \partial_\beta u^\beta + \partial_k T^{0k} + \partial_0 T^{00} = 0 \\ u^i u^\beta \partial_\beta \rho + \rho u^\beta \partial_\beta u^i + \rho u^i \partial_\beta u^\beta + \partial_0 T^{i0} + \partial_k T^{ik} = f^i \end{cases}$$

Nous avons aussi les relations suivantes :

$$\partial_\beta u^\beta = \partial_0 u^0 + \partial_k u^k$$
$$u^\beta \partial_\beta \rho = u^0 \partial_0 \rho + u^i \partial_i \rho$$
$$u^\beta \partial_\beta u^i = u^0 \partial_0 u^i + u^i \partial_i u^i$$

Dans $\mathcal{R}_0$ avec les relations (213) p. 319 ($\forall i\ u^i = 0,\ u_0 = 1,\ \partial_0 u_0 = 0$), elles deviennent :

$$\partial_\beta u^\beta = \partial_k u^k$$
$$u^\beta \partial_\beta \rho = c\partial_0 \rho$$
$$u^\beta \partial_\beta u^i = c\partial_0 u^i$$

Remplaçons :

$$\begin{cases} c^2 \partial_0 \rho + \rho c \partial_k u^k + \partial_k T^{0k} + \partial_0 T^{00} = 0 \\ u^i c \partial_0 \rho + \rho u^\beta \partial_\beta u^i + \rho u^i \partial_\beta u^\beta + \partial_0 T^{i0} + \partial_k T^{ik} = f^i \end{cases}$$

De nouveau avec les relations (213) p. 319 :

$$\begin{cases} c^2 \partial_0 \rho + \rho c \partial_i u^i + \partial_k T^{0k} + \partial_0 T^{00} = 0 \\ \rho c \partial_0 u^i + \partial_0 T^{i0} + \partial_k T^{ik} = f^i \end{cases}$$

Par hypothèse $\forall\alpha, T^{\alpha 0} = 0$:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta}u_\beta &= T^{\alpha 0}u_0 + T^{\alpha j}u_j \quad \forall\alpha \\ &= 0 \end{aligned} \tag{220}$$

Les tenseurs et vecteurs ayant une existence propre indépendante de tout référentiel, cette relation vraie dans $\mathcal{R}_0$ est vraie dans tout référentiel.

$$\begin{aligned} T^{\alpha 0}c + T^{\alpha j}u_j = 0 \quad \forall\alpha \\ T^{\alpha 0}c = -T^{\alpha j}u_j \quad \forall\alpha \\ c\partial_\beta T^{\alpha 0} = -\partial_\beta T^{\alpha j}u_j \quad \forall\alpha, \beta \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c\partial_k T^{\alpha 0} = -\partial_k T^{\alpha j}u_j & \forall\alpha \\ c\partial_0 T^{\alpha 0} = -\partial_0 T^{\alpha j}u_j & \forall\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c\partial_k T^{k0} = -\partial_k T^{kj}u_j & \forall\alpha = k \\ c\partial_0 T^{i0} = -\partial_0 T^{ij}u_j & \forall i \\ c\partial_0 T^{00} = -\partial_0 T^{0j}u_j = -u_j\partial_0 T^{0j} - T^{0j}\partial_0 u_j = 0 \end{cases}$$

Avec ces relations :

$$\begin{cases} c^2\partial_0\rho + c\rho\partial_i u^i - \dfrac{1}{c}\,\partial_k T^{kj}u_j = 0 \\ c\rho\partial_0 u^i - \dfrac{1}{c}\,\partial_0 T^{ij}u_j + \partial_k T^{ik} = f^i \end{cases}$$

Or, nous avons également

$$\begin{aligned} \partial_i u^i &= \gamma\partial_i v^i + v^i\partial_i\gamma = \gamma\partial_i v^i \\ \partial_0 u^i &= \gamma\partial_0 v^i + v^i\partial_0\gamma = \gamma\partial_0 v^i \end{aligned}$$

Dans $\mathcal{R}_0$, $\gamma = 1$:

$$\begin{aligned} \partial_i u^i &= \partial_i v^i \\ \partial_0 u^i &= \partial_0 v^i \end{aligned}$$

Nous retrouvons les équations (218) p. 324 :

$$\begin{cases} c\partial_0\rho + \rho\partial_i v^i - \dfrac{1}{c^2}\,\partial_i t^{ij}v_j = 0 \\ c\rho\partial_0 v^i - \dfrac{1}{c}\,\partial_0 t^{ij}v_j + \partial_k t^{ik} = f^i & \qquad \forall i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

25.6 Le tenseur énergie-impulsion

Les équations (219) p. 325 s'écrivent :

$$\forall\alpha \quad \nabla_\beta P^{\alpha\beta} = \phi^\alpha \tag{221}$$

où l'on a posé

$$\boxed{\forall\alpha, \beta \quad P^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta + T^{\alpha\beta}} \tag{222}$$

Le tenseur symétrique $P^{\alpha\beta}$ est le tenseur *énergie-impulsion* du milieu continu considéré. Le produit scalaire avec la quadrivitesse s'écrit (en utilisant (220) p. 326) :

$$\begin{aligned} \forall\alpha \quad P^{\alpha\beta}u_\beta &= \left(\rho u^\alpha u^\beta + T^{\alpha\beta}\right)u_\beta \\ &= \rho u^\alpha u^\beta u_\beta \\ &= c^2\rho u^\alpha \end{aligned}$$

Le tenseur énergie-impulsion peut être vu comme une application linéaire ayant pour vecteur propre le quadrivecteur vitesse et pour valeur propre correspondante la masse volumique ρ.

D'après (201) p. 312, lorsque le milieu continu est un fluide parfait le tenseur énergie-impulsion admet pour composantes :

$$\forall i, k \quad T^{ik} = t^{ik} = -p\eta^{ik} \qquad ; \qquad \forall i \quad T^{i0} = T^{0i} = T^{00} = 0$$

Le signe négatif vient du choix de la métrique $\forall i, k \ \eta^{ik} = -1$. En tenant compte du fait que $\forall i \ u^i = 0 \Rightarrow \forall i, k \ u^i u^k = 0$ et $u^0 u^0 = c^2$, dans un système de coordonnées quelconque :

$$T^{\alpha\beta} = -pg^{\alpha\beta} + \frac{p}{c^2} u^\alpha u^\beta$$

D'où

$$\begin{aligned}\forall \alpha, \beta \quad P^{\alpha\beta} &= \rho u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta} + \frac{p}{c^2} u^\alpha u^\beta \\ &= \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta}\end{aligned}$$

25.7 Principe de moindre action en relativité restreinte

En mécanique non relativiste, l'action de Hamilton d'un système de lagrangien $\mathscr{L}$ entre les évènements A (départ du point A à l'instant t_A) et B (arrivée au point B à l'instant t_B) a pour expression :

$$S = \int_{t_A}^{t_B} \mathscr{L}\left(y(t), \dot{y}(t), t\right) dt$$

Dans le cas d'un système libre, le principe de moindre action se réduit à un principe de moindre temps :

$$S = \varepsilon \int_{t_A}^{t_B} dt$$

où ε est invariant sur la trajectoire, ayant la dimension d'une énergie et caractérisant le système. Le principe de moindre action

$$\delta S = 0$$

donne l'équation de la trajectoire du système. Cette trajectoire existe en elle-même et doit être indépendante du référentiel galiléen de l'observateur.

Par analogie, en relativité restreinte l'action doit être invariante par changement de référentiel galiléen pour que la trajectoire le soit aussi. L'action relativiste est donc de la forme :

$$S = \varepsilon \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau$$

où τ est le temps propre du système et ε un invariant relativiste ayant la dimension d'une énergie et caractérisant le système. L'action écrite dans un référentiel galiléen quelconque doit être invariante, donc de la forme que nous avons indiquée :

$$\begin{aligned}\int_{t_A}^{t_B} \mathscr{L}\left(y(t), \dot{y}(t), t\right) dt &= \varepsilon \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \\ &= \varepsilon \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{\gamma_v} dt\end{aligned}$$

On en déduit l'expression du lagrangien dans le référentiel galiléen quelconque :

$$\mathscr{L} = \varepsilon/\gamma_v$$

Prenons le développement limité de $1/\gamma_v$ pour $v \ll c$:

$$\mathscr{L} \approx \varepsilon \left[1 - v^2/(2c^2)\right]$$

Le lagrangien est défini à une constante additive près donc :

$$\mathscr{L} \approx -\frac{\varepsilon v^2}{2c^2}$$

À faible vitesse devant c il doit redonner l'énergie cinétique du système libre :

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon v^2}{2c^2} &= \frac{1}{2} m v^2 \\ \varepsilon &= -mc^2 \end{aligned}$$

On a donc pour le lagrangien relativiste d'un système libre

$$\boxed{\mathscr{L} = -mc^2/\gamma_v} \tag{223}$$

et pour l'action du système libre :

$$\begin{aligned} S &= -mc^2 \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \\ &= -mc^2 \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{\gamma_v} \, dt \end{aligned}$$

Le principe de moindre action s'écrit :

$$-mc^2 \delta \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{\gamma_v} \, dt = 0$$

Avec les relations (210) p. 317 et (211) p. 318,

$$dt = \gamma_v ds/c$$

nous avons

$$S = -mc \int_A^B ds \tag{224}$$

et le principe de moindre action dans l'espace-temps quadridimensionnel de la relativité restreinte s'écrit :

$$-mc\delta \int_A^B ds = 0 \tag{225}$$

où A est l'évènement départ du point x_A^1, x_A^2, x_A^3 à l'instant x_A^0, et B l'évènement arrivée au point x_B^1, x_B^2, x_B^3 à l'instant x_B^0. L'action est inversement proportionnelle à la quadrilongueur de la ligne d'univers parcourue par le système entre les évènements A et B. D'après (30) p. 76, la quadrilongueur est maximale pour une ligne d'univers droite (objet immobile dans le référentiel galiléen), par conséquent l'action est minimale lorsque la ligne d'univers est une droite.

25.7.1 Trajectoire d'un système libre

Cherchons la trajectoire à partir du principe de moindre action sans utiliser les équations de Lagrange :

$$\begin{aligned}-mc\delta\int_A^B ds &= 0\\ -m\int_A^B c\delta ds &= 0\end{aligned}$$

En coordonnées galiléennes réduites (ct, x, y, z) :

$$\begin{aligned}ds^2 &= dx^\alpha dx_\alpha\\ \delta(ds^2) &= \delta(dx^\alpha dx_\alpha)\\ 2ds\delta ds &= dx^\alpha \delta dx_\alpha + dx_\alpha \delta dx^\alpha\end{aligned}$$

Dans l'espace-temps pseudo-euclidien de la relativité restreinte $dx^\alpha = -dx_\alpha$:

$$\begin{aligned}2ds\delta ds &= (-dx_\alpha)\delta(-dx^\alpha) + dx_\alpha \delta dx^\alpha\\ &= 2dx_\alpha \delta dx^\alpha\\ \delta ds &= \frac{dx_\alpha}{ds}\,\delta dx^\alpha\\ &= \frac{u_\alpha}{c}\,\delta dx^\alpha\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}d(u_\alpha \delta x^\alpha) &= du_\alpha \delta x^\alpha + u_\alpha d\delta x^\alpha\\ &= du_\alpha \delta x^\alpha + u_\alpha \delta dx^\alpha\\ -d(u_\alpha \delta x^\alpha) + du_\alpha \delta x^\alpha &= -u_\alpha \delta dx^\alpha\end{aligned}$$

Le principe de moindre action devient :

$$\begin{aligned}-m\int_A^B u_\alpha \delta dx^\alpha &= 0\\ -m\int_A^B (u_\alpha \delta x^\alpha) + m\int_A^B du_\alpha \delta x^\alpha &= 0\\ -m\left[u_\alpha \delta x^\alpha\right]_A^B + m\int_A^B \frac{du_\alpha}{ds}\,\delta x^\alpha ds &= 0 \qquad (226)\end{aligned}$$

Or $\delta x^\alpha(A) = \delta x^\alpha(B) = 0$

$$\begin{aligned}m\int_A^B \frac{du_\alpha}{ds}\,\delta x^\alpha ds &= 0\\ \frac{du_\alpha}{ds} &= 0 \qquad (227)\end{aligned}$$

Le quadrivecteur vitesse est constant pour un système libre.

25.7.2 Impulsion relativiste

En notation vectorielle, l'impulsion relativiste d'un système libre s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{v}} \\ &= -mc^2 \, \frac{\partial \sqrt{1 - \vec{v} \cdot \boldsymbol{v}/c^2}}{\partial \vec{v}} \\ &= -mc^2 \, \frac{2\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{p} = \gamma_v m \vec{v}}$$

Cette relation définit le trivecteur quantité de mouvement relativiste.

> Remarque 54. *Avec le lagrangien d'un système libre, les équations de Lagrange s'écrivent*
> $$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{v}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{r}} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{v}}\right) &= 0 \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= 0\end{aligned}$$

25.7.3 Énergie relativiste

En notation vectorielle, la fonction énergie d'un système libre s'écrit :

$$\begin{aligned}H &= \vec{v} \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{v}} - \mathscr{L} \\ &= \vec{v} \cdot \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{H = \gamma_v mc^2}$$

Cette relation définit l'énergie totale relativiste.

25.7.4 Équation de Hamilton-Jacobi relativiste pour une particule libre

Nous avons obtenu précédemment la relation (226) p. 329 :

$$-m \left[u_\alpha \delta x^\alpha\right]_A^B + m \int_A^B \frac{du_\alpha}{ds} \, \delta x^\alpha ds = 0$$

Sur une trajectoire réelle, la quadrivitesse d'une particule libre est constante, $\frac{du_\alpha}{ds} = 0$:

$$-m \left[u_\alpha \delta x^\alpha\right]_A^B = 0$$

Si l'on considère deux trajectoires ayant même point de départ $\delta x_A^\alpha = 0$ mais une arrivée différente, il reste :

$$\begin{aligned}\delta S &= -m u_\alpha \delta x^\alpha \\ &= -p_\alpha \delta x^\alpha \\ \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} &= -p_\alpha\end{aligned}$$

Remarque 55. *La relation* (48) *p.* *101* *donne le passage entre composantes covariantes-contravariantes, pour le quadri-vecteur position*

$$\boldsymbol{r}(x^0, x^i) = \boldsymbol{r}(x_0, -x_i)$$

et pour la quadri-énergie-impulsion,

$$\boldsymbol{p}(p^0, p^i) = \boldsymbol{p}(p_0, -p_i)$$

si bien que l'on a également :

$$\frac{\partial S}{\partial x_\alpha} = -p^\alpha$$

Avec la définition (25.3.3) p. 320 de la quadri-impulsion et la relation (217) p. 322 sur l'énergie :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial x^0} &= -p_0 \\
\frac{\partial S}{c\partial t} &= -\frac{E}{c} \\
\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 &= \frac{E^2}{c^2} \\
\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 &= \frac{m^2c^4}{c^2} + p^2
\end{aligned}$$

Nous obtenons l'équation de Hamilton-Jacobi relativiste :

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = m^2c^2}$$

26

Gravitation relativiste

26.1 Principe d'équivalence

On utilise le principe d'équivalence du paragraphe 22.5 p. 258 pour guider notre réflexion. Un champ de gravitation est équivalent à un référentiel en rotation. Dans un référentiel d'inertie $\mathcal{R}$ de système de coordonnées galiléennes (t, x, y, z), l'intervalle ds est donné par :

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

L'intervalle conserve sa forme lorsque l'on passe à un autre référentiel inertiel. Voyons comment il se transforme lorsque nous passons dans un référentiel non inertiel $\mathcal{R}'$ de coordonnées (t', x', y', z') en rotation uniforme dans $\mathcal{R}$:

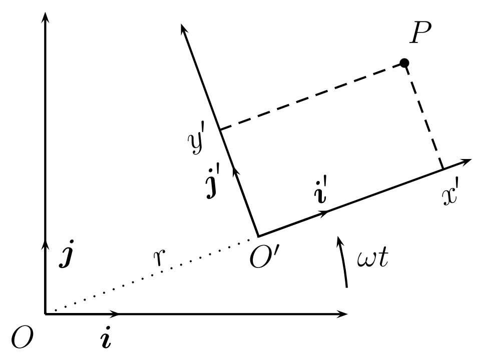


Fig. 26.1 – Référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}$

Écrivons l'expression des vecteurs de base du référentiel $\mathcal{R}'$ en fonction des vecteurs de base du référentiel $\mathcal{R}$, dans le référentiel $\mathcal{R}'$. A priori nous ne connaissons pas la transformation du temps, nous supposons $t' = t$ et envisagerons une transformation du temps un peu plus loin :

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \cos(\omega t)\boldsymbol{i} + \sin(\omega t)\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j}' = -\sin(\omega t)\boldsymbol{i} + \cos(\omega t)\boldsymbol{j} \end{cases}$$

Soit P un point quelconque fixe dans $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{OP} &= \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'P} \\ &= r\boldsymbol{i}' + x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' \\ x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} &= (r + x')[\cos(\omega t)\boldsymbol{i} + \sin(\omega t)\boldsymbol{j}] + y'[-\sin(\omega t)\boldsymbol{i} + \cos(\omega t)\boldsymbol{j}] \end{aligned}$$

r et ω sont ici des paramètres :

$$\begin{cases} x = (r + x')\cos(\omega t) - y'\sin(\omega t) \\ y = (r + x')\sin(\omega t) + y'\cos(\omega t) \\ z = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = g(t, x', y') \\ y = h(t, x', y') \\ z = z' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial x'}\,dx' + \dfrac{\partial x}{\partial y'}\,dy' + \dfrac{\partial x}{\partial t}\,dt \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial x'}\,dx' + \dfrac{\partial y}{\partial y'}\,dy' + \dfrac{\partial y}{\partial t}\,dt \\ dz = dz' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = \cos(\omega t)dx' - \sin(\omega t)dy' - \omega[x'\sin(\omega t) + y'\cos(\omega t)]dt \\ dy = \sin(\omega t)dx' + \cos(\omega t)dy' + \omega[x'\cos(\omega t) - y'\sin(\omega t)]dt \\ dz = dz' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx^2 = \cos^2(\omega t)dx'^2 + \sin^2(\omega t)dy'^2 - 2\cos(\omega t)\sin(\omega t)dx'dy' \\ \qquad + \omega^2[x'^2\sin^2(\omega t) + y'^2\cos^2(\omega t) + 2x'y'\sin(\omega t)\cos(\omega t)]dt \\ \qquad\qquad - 2\omega[\cos(\omega t)dx' - \sin(\omega t)dy'][x'\sin(\omega t) + y'\cos(\omega t)]dt \\ dy^2 = \sin^2(\omega t)dx'^2 + \cos^2(\omega t)dy'^2 + 2\sin(\omega t)\cos(\omega t)dx'dy' \\ \qquad + \omega^2[x'^2\cos^2(\omega t) + y'^2\sin^2(\omega t) - 2x'y'\cos(\omega t)\sin(\omega t)]dt \\ \qquad\qquad + 2\omega[\sin(\omega t)dx' + \cos(\omega t)dy'][x'\cos(\omega t) - y'\sin(\omega t)]dt \\ dz^2 = dz'^2 \end{cases}$$

Dans le référentiel tournant, l'intervalle s'écrit :

$$ds^2 = [c^2 - \omega^2(x'^2 + y'^2)]dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 - 2\omega dt(y'dx' + x'dy')$$

Quelle que soit la transformation du temps on ne peut faire disparaitre le dernier terme et cette expression ne peut se réduire à une somme de carrés de différentielles des coordonnées t', x', y', z'. Ce système de coordonnées est donc curviligne est le carré de l'intervalle élémentaire ds s'écrit sous la forme quadratique générale

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

où les $g_{\mu\nu}$ sont fonction des coordonnées spatiales et temporelle. Les référentiels non galiléens étant équivalents à un champ de gravitation, on en déduit que les masses et donc l'énergie déterminent les propriétés géométriques de l'espace-temps.

26.2 Métrique de la relativité générale

En mécanique classique la gravitation est une force attractive entre les masses. Nous abandonnons ici la notion de force gravitationnelle pour un modèle où les masses et distributions énergétiques courbent l'espace-temps. Une masse d'épreuve très petite ainsi que la lumière suivent les géodésiques de l'espace-temps.

L'univers est représenté par une variété riemannienne V_4 à quatre dimensions, de métrique

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{228}$$

de signature $(+ - --)$ ou $(- + ++)$. En particulier l'équation $ds^2 = 0$ définit en chaque point de la variété V_4 un hypercône élémentaire de lumière. Les $g_{\mu\nu}$ sont des fonctions des coordonnées x^μ, dont les dérivées déterminent les symboles de Christoffel qui apparaissent dans les équations des géodésiques. Ils définissent donc complètement les géodésiques de ce système de coordonnées, donc la gravitation, c'est pourquoi on les appelle *potentiels de gravitation* de ce système. Dans l'espace-temps de dimension $n = 4$ ils sont au nombre de seize (4×4), mais d'après la relation (35) p. 82, seules dix composantes sont différentes :

$$n(n+1)/2 = 10$$

Le problème consiste en la détermination de ces potentiels de gravitation.

La relativité restreinte traite les référentiels accélérés mais pas la gravitation. L'espace-temps plat pseudo-euclidien de la relativité restreinte est osculateur à l'espace-temps courbe pseudo-riemannien de la relativité générale. Quelle que soit l'intensité du champ gravitationnel, un observateur inertiel se déplace sur une géodésique de l'espace-temps de la relativité générale, dans l'espace pseudo-euclidien de raccordement de la relativité restreinte.

26.3 Champ gravitationnel faible

Une faible courbure de l'espace-temps doit redonner la théorie de la gravitation newtonienne pour des vitesses petites devant la vitesse limite. En coordonnées galiléennes, un champ de gravitation faible s'écrit de la forme :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique de l'espace plat pseudo-euclidien de Poincaré-Minkowski (relation (32) p. 76), et $h_{\mu\nu}$ est le tenseur symétrique

$$[h_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{01} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{02} & h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{03} & h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{bmatrix}$$

tel que $\forall \mu, \nu,\ h_{\mu\nu} \approx 0$. On suppose également que dans le système de coordonnées choisi la métrique est stationnaire (constante dans le temps) :

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$$

Cela suppose que le référentiel inertiel ne tourne pas sur lui-même.

Remarque 56. *Un référentiel inertiel peut tourner sur lui-même, par rapport aux étoiles dites fixes. Imaginons deux masses gravitant autour de la Terre dans le même plan, en décrivant dans le même sens une trajectoire circulaire de même rayon. Elles se suivent donc. Relions ces deux masses par une tige rigide pour qu'elles ne constituent qu'un seul et même objet. Cet objet est inertiel, pour autant il tourne sur lui-même par rapport au reste de l'univers (ou, par rapport aux étoiles fixes) car il montre toujours la même face à la Terre. Les forces d'inertie ne sont donc pas dues à la rotation par rapport au reste de l'univers, mais à la sortie du solide hors de la géodésique que suit son centre d'inertie.*

La ligne d'univers d'une particule en chute libre dans ce champ de gravitation est une géodésique, relation (163) p. 266,

$$\forall \lambda = 0, 1, 2, 3 \qquad \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

où en relativité générale, τ est le temps propre de l'observateur sur la géodésique, et $x^0 = ct$ est le temps coordonnée, mesuré loin de toute masse-énergie. La particule est supposée non relativiste, son trivecteur vitesse est petit devant la vitesse limite c :

$$\forall i = 1,2,3 \qquad \begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &\ll c \\ dx^i &\ll cdt \\ dx^i &\ll dx^0 \\ \frac{dx^i}{d\tau} &\ll \frac{dx^0}{d\tau} \end{aligned}$$

En faisant cette approximation puis en remplaçant x^0 par ct :

$$\forall \lambda = 0,1,2,3 \qquad \begin{aligned} \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + {\Gamma^\lambda}_{00} \frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} &\approx 0 \\ \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + {\Gamma^\lambda}_{00} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 &\approx 0 \end{aligned} \tag{229}$$

Écrivons les symboles de Christoffel de deuxième espèce en fonction des potentiels de gravitation selon la relation (127) p. 225. Dans la relation qui suit, les deux premiers termes du membre de droite sont nuls car le système de coordonnées est stationnaire :

$$\forall \lambda = 0,1,2,3 \qquad \begin{aligned} {\Gamma^\lambda}_{00} &= \tfrac{1}{2}\, g^{\lambda\kappa} \left(g_{\kappa 0,0} + g_{0\kappa,0} - g_{00,\kappa}\right) \\ &= -\tfrac{1}{2}\, g^{\lambda\kappa} g_{00,\kappa} \end{aligned}$$

Faisons l'approximation du premier ordre

$$g^{\lambda\kappa} \approx \eta^{\lambda\kappa}$$

De plus

$$g_{00,\kappa} = h_{00,\kappa}$$

car les composantes du tenseur métrique $\eta_{\mu\nu}$ de l'espace de Poincaré-Minkowski sont des constantes :

$$\forall \lambda = 0,1,2,3 \qquad {\Gamma^\lambda}_{00} \approx -\tfrac{1}{2}\eta^{\lambda\kappa} h_{00,\kappa}$$

La relation (229) devient :

$$\forall \lambda = 0,1,2,3 \qquad \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} \approx \frac{c^2}{2}\, \eta^{\lambda\kappa} h_{00,\kappa} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$$

— La première relation, pour $\lambda = 0$, donne pour la partie temporelle :

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} \approx \frac{c^2}{2}\, \eta^{0\kappa} h_{00,\kappa} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$$

Seule η^{00} est non nulle donc $\kappa = 0$, et le système de coordonnées étant stationnaire $h_{00,0} = g_{00,0} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^0}{d\tau^2} &\approx \frac{c^2}{2}\, \eta^{00} h_{00,0} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \\ &\approx 0 \end{aligned}$$

Soit α une constante :

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} \approx 0$$
$$\frac{dt}{d\tau} \approx \alpha$$
$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \approx \alpha^2$$
$$d\tau^2 \approx \frac{dt^2}{\alpha^2}$$

— Les trois relations suivantes, pour $i = 1, 2, 3$, donnent pour la partie spatiale :

$$\forall i = 1, 2, 3 \qquad \frac{d^2x^i}{d\tau^2} \approx \frac{c^2}{2}\,\eta^{ij} h_{00,j} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$$

Pour une signature de l'espace de Poincaré-Minkowski $(+---)$ nous avons $\eta^{ij} = -\delta^{ij}$:

$$\forall i = 1, 2, 3 \qquad \frac{d^2x^i}{d\tau^2} \approx -\frac{c^2}{2}\,\delta^{ij} h_{00,j} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$$
$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{d\tau^2} \approx -\frac{c^2}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \mathbf{grad}\, h_{00}$$
$$\alpha^2 \frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} \approx -\frac{c^2}{2}\,\alpha^2\, \mathbf{grad}\, h_{00}$$
$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} \approx -\frac{c^2}{2}\,\mathbf{grad}\, h_{00}$$

Comparons avec l'équation de Newton d'une particule dans un champ de gravitation. Soient m_{g} la masse grave et m_i la masse inerte de cette particule :

$$\boldsymbol{f} = m_{\mathrm{g}}\mathbf{g}$$
$$m_i \frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = -m_{\mathrm{g}}\, \mathbf{grad}\, \phi$$

Nous avons alors :

$$-\frac{c^2}{2}\,\mathbf{grad}\, h_{00} \approx -\frac{m_{\mathrm{g}}}{m_i}\,\mathbf{grad}\, \phi$$

En posant l'égalité entre masse grave et masse inerte :

$$h_{00} \approx \frac{2\phi}{c^2}$$

Par conséquent, dans la limite des champs de gravitation faibles :

$$\boxed{g_{00} \approx 1 + \frac{2\phi}{c^2}} \qquad (230)$$

où d'après (152) p. 250 ϕ est négatif.

Cette dernière relation peut être obtenue grâce au principe de moindre action. En mécanique non relativiste, le lagrangien d'un système dans un champ de gravitation de potentiel ϕ s'écrit

$$\mathscr{L} = \tfrac{1}{2} m_i v^2 - m_g \phi$$

En relativité restreinte, la relation 223 p. 328 donne

$$\mathscr{L} = -m_i c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - m_g \phi$$

À faible vitesse nous avons :

$$\mathscr{L} \approx -m_i c^2 + \tfrac{1}{2} m_i v^2 - m_g \phi$$

On remarque que si l'on supprime le terme constant $m_i c^2$ du lagrangien (ce qui est toujours loisible de faire) on retrouve bien le lagrangien non relativiste. L'action s'écrit :

$$\begin{aligned} S &= \int \mathscr{L} dt \\ &\approx -mc \int \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) dt \end{aligned}$$

où l'on a posé l'égalité entre masse inerte et masse grave. En comparant avec (224) p. 328 :

$$\begin{aligned} ds &\approx \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) dt \\ ds^2 &\approx \left[c^2 + \left(\frac{v^2}{2c} \right)^2 - v^2 + \left(\frac{\phi}{c} \right)^2 + 2 \left(c - \frac{v^2}{2c} \right) \frac{\phi}{c} \right] dt^2 \\ ds^2 &\approx \left\{ c^2 + v^2 \left[\left(\frac{v^2}{4c^2} \right) - 1 \right] + 2\phi \left[1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\phi}{2c^2} \right] \right\} dt^2 \end{aligned}$$

On approxime à moins un et un les termes entre crochets :

$$\begin{aligned} ds^2 &\approx \left(c^2 + 2\phi - v^2 \right) dt^2 \\ &\approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) (cdt)^2 - dr^2 \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{00} (dx^0)^2 - g_{ii} (dx^i)^2 \end{aligned}$$

si bien que

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\phi}{c^2}$$

> Exemple 26.3.1. *Calculons quelques valeurs de la correction à apporter à un espace plat. La relation* (152) *p.* 250 *donne l'expression du potentiel de champ gravitationnel* ϕ *:*
>
> $$\frac{2\phi}{c^2} = \frac{-2\mathrm{G}M}{rc^2}$$
>
> *où la vitesse limite vaut exactement* $c = 299\ 792\ 458$ m/s, *et la constante de gravitation a pour valeur* $\mathrm{G} = 6{,}674\ 30 \times 10^{-11}$ m³/kg/s².
> *Prenons la Terre qui a pour masse* $M_{\male} = 5{,}973\ 6 \times 10^{24}$ kg *et pour rayon moyen* $r_{\male} = 6\ 371$ km. *À sa surface, la correction est de :*
>
> $$\begin{aligned} \frac{-2\mathrm{G}M_{\male}}{rc^2} &= \frac{-2 \times 6{,}674\ 30 \times 10^{-11} \times 5{,}973\ 6 \times 10^{24}}{6\ 371 \times 10^3 \times 299\ 792\ 458^2} \\ &= -1{,}392\ 59 \times 10^{-9} \end{aligned}$$

Prenons le Soleil qui a pour masse $M_\odot = 1{,}989 \times 10^{30}$ kg *et pour rayon* $r_\odot = 696\ 342$ km. *À sa surface, la correction est de :*

$$\begin{aligned}\frac{-2\mathrm{G}M_\odot}{rc^2} &= \frac{-2 \times 6{,}674\ 30 \times 10^{-11} \times 1{,}989 \times 10^{30}}{696\ 342 \times 10^3 \times 299\ 792\ 458^2} \\ &= -4{,}242\ 35 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

Ces valeurs petites devant l'unité n'invalident pas l'approximation d'un champ de gravitation faible (elles ne le valident pas non plus).

Remarque 57. *On ne peut démontrer ce que l'on a posé en hypothèse, par exemple que le champ de gravitation est faible. Tout ce que l'on peut faire est de montrer que le raisonnement est cohérent, en vérifiant que les valeurs sont petites devant l'unité. Si ce n'était pas le cas l'hypothèse serait fausse, mais comme c'est le cas on ne peut pas conclure. Il se pourrait que le raisonnement en supposant que le champ de gravitation est fort donne des valeurs grandes devant l'unité.*

26.4 Écoulement du temps dans un champ de gravitation

Un horloger et son horloge sont fixes dans le champ de gravitation terrestre. Cet horloger ne peut observer la dilatation du temps en comparant l'intervalle de temps de l'horloge avec celui donné par le constructeur, puisque le champ de gravitation affecte le temps et non l'horloge. L'horloger n'a pas conscience de la dilatation du temps, son horloge fonctionne de manière nominale. Ainsi, le carré de l'intervalle entre les deux évènements que sont le tic et le tac de l'horloge marque le temps propre de l'horloger :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2$$

Un observateur dans un champ de gravitation de même intensité, et sans vitesse relative avec l'horloger, mesure le même écoulement du temps que l'horloger, leurs horloges sont synchrones.

En revanche, un observateur inertiel loin de toute masse-énergie créant un champ de gravitation ou en chute libre dans un champ de gravitation peut observer la déformation de l'espace-temps due à la présence de la Terre.

Dans son système de coordonnées (x^μ), le carré de l'intervalle entre le tic et le tac de l'horloge est donné par :

$$ds'^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

L'intervalle entre deux évènements est un invariant. Les carrés des intervalles dans les deux référentiels (dans les deux systèmes de coordonnées) sont égaux :

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ c^2 \left(\frac{d\tau}{dx^0}\right)^2 &= g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dx^0} \frac{dx^\nu}{dx^0}\end{aligned}$$

$t = x^0/c$ est le temps propre de l'observateur galiléen, et u^μ sa quadrivitesse dans le référentiel terrestre de l'horloger :

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{cdt}\frac{dx^\nu}{cdt}$$
$$c^2\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$$

Si le trivecteur vitesse spatiale u^i de l'observateur galiléen est nul dans le référentiel terrestre :

$$c^2\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = g_{00}u^0u^0$$
$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = g_{00}$$
$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\,dt \tag{231}$$

où g_{00} est le coefficient temporel de la métrique au niveau de l'horloge. En utilisant (230) p. 337 comme approximation d'un champ de gravitation faible, nous obtenons $d\tau$ en fonction de dt :

$$d\tau \approx \left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)^{1/2} dt$$
$$\approx \left(1+\frac{\phi}{c^2}\right) dt \tag{232}$$

Remarque 58. *Le potentiel gravitationnel ϕ étant négatif, on peut aussi écrire :*

$$d\tau \approx \left(1-\frac{|\phi|}{c^2}\right) dt$$

Si l'horloge s'approche d'un objet massif, ϕ augmente en valeur absolue, On observe que le temps propre de l'horloge ralenti. De même, nous obtenons dt en fonction de $d\tau$:

$$dt \approx \left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)^{-1/2} d\tau$$
$$\approx \left(1-\frac{\phi}{c^2}\right) d\tau$$

Remarque 59. *Le potentiel gravitationnel ϕ étant négatif, on peut aussi écrire :*

$$dt \approx \left(1+\frac{|\phi|}{c^2}\right) d\tau$$

Pour un intervalle de temps fini

$$\Delta\tau = \int \sqrt{g_{00}}\,dt$$

D'après cette dernière relation, notre choix de signature de métrique implique

$$g_{00} > 0$$

Lorsque le champ de gravitation est constant dans le temps

$$\Delta\tau = \sqrt{g_{00}}\,\Delta t$$

26.5 Décalage gravitationnel vers le rouge

Soit un atome en un point d'un champ de gravitation, de fréquence propre

$$\nu_0 = \frac{dN}{dt_0}$$

Grâce à la relation (232) p. 340, nous avons :

$$\begin{aligned}\nu_0 &= \frac{dN}{dt_0}\\ &= \frac{dN}{dt}\,\frac{dt}{dt_0}\\ &\approx \nu\left(1 - \frac{\phi}{c^2}\right)\end{aligned}$$

En un point A où règne un champ de gravitation de potentiel ϕ_A, la fréquence d'un atome vaut :

$$\nu_{0A} \approx \nu\left(1 - \frac{\phi_A}{c^2}\right)$$

En un point B où règne un champ de gravitation de potentiel ϕ_B, elle vaut :

$$\begin{aligned}\nu_{0B} &\approx \nu\left(1 - \frac{\phi_B}{c^2}\right)\\ &\approx \nu_{0A}\left(1 - \frac{\phi_A}{c^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{\phi_B}{c^2}\right)\\ &\approx \left(1 + \frac{\phi_A}{c^2}\right)\left(1 - \frac{\phi_B}{c^2}\right)\\ &\approx 1 + \frac{\phi_A}{c^2} - \frac{\phi_B}{c^2} - \frac{\phi_A\phi_B}{c^4}\\ &\approx \nu_{0A}\left(1 + \frac{\phi_A - \phi_B}{c^2}\right)\end{aligned}$$

Exemple 26.5.1. *Sur Terre on mesure la fréquence de la lumière émise par le Soleil :*

$$\begin{aligned}\nu_{0\oplus} &\approx \nu_{0\odot}\left(1 - \frac{\phi_\odot - \phi_♁}{c^2}\right)\\ &\approx \nu_{0\odot}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{-GM_\odot}{R_\odot} + \frac{GM_♁}{R_♁}\right)\right]\\ &\approx \nu_{0\odot}\left(1 - \frac{GM_\odot}{c^2R_\odot}\right)\\ \frac{\nu_{0\oplus} - \nu_{0\odot}}{\nu_{0\odot}} &\approx -\frac{GM_\odot}{c^2R_\odot}\end{aligned}$$

Constante gravitationnelle : $G \approx 6{,}674\ 28 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$
Vitesse de la lumière : $c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{m/s}$
Masse du Soleil : $M_\odot \approx 1{,}988\ 5 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}$

Rayon moyen du Soleil : $R_{\odot} \approx 696\ 342 \times 10^3$ m

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_{0\odot}} \approx -2 \times 10^{-6}$$

Les raies spectrales d'émission des atomes venant du Soleil et observées depuis la Terre sont décalées vers les basses fréquences (vers le rouge) par rapport aux raies spectrales d'émission de mêmes atomes situés sur la Terre.

Exemple 26.5.2. *On considère un photon émis verticalement vers le haut, depuis un point A de la surface terrestre, vers un point B à une hauteur H au dessus du point A. On note M la masse de la Terre et R son rayon :*

$$\begin{aligned}\nu_{0B} &\approx \nu_{0A}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{GM}{R} - \frac{GM}{R+H}\right)\right] \\ &\approx \nu_{0A}\left[1 - \frac{GM}{Rc^2}\left(\frac{H}{R+H}\right)\right]\end{aligned}$$

On fait la nouvelle approximation $R + H \approx R$:

$$\begin{aligned}\nu_{0B} &\approx \nu_{0A}\left(1 - \frac{GMH}{R^2c^2}\right) \\ \frac{\nu_{0B} - \nu_{0A}}{\nu_{0A}} &\approx \frac{-GMH}{R^2c^2} \\ &\approx \frac{-gH}{c^2}\end{aligned}$$

où est le champ de pesanteur à la surface de la Terre (supposé constant jusqu'à la hauteur H). En B la fréquence du photon est décalée vers le rouge.
Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre à Paris : $g \approx 9{,}81$ m/s^2
Vitesse de la lumière : $c = 299\ 792\ 458$ m/s
Hauteur : $H = 20$ m

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx 2{,}18 \times 10^{-15}$$

26.6 Distance dans un champ de gravitation

Contrairement à la relativité restreinte, en relativité générale on ne peut définir l'élément de distance spatiale en posant $dx^0 = 0$, car d'après (231), dans un champ de gravitation le temps propre est fonction de x^0 par l'intermédiaire de g_{00} lui même fonction du lieu. On procède alors de la façon suivante : d'un point B de coordonnées spatiales $x^i + dx^i$ on emet un rayon lumineux vers un point A de coordonnées spatiales x^i, qui réfléchit le rayon vers le point B. Le temps mesuré en B multiplié par c est égal au double de la distance AB. L'intervalle d'univers entre l'évènement émission du rayon en B et l'évènement réception du rayon en B s'écrit :

$$ds^2 = g_{\lambda\mu}dx^\lambda dx^\mu$$

En séparant les coordonnées spatiales et temporelles :

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j + 2g_{0i}dx^0 dx^i + g_{00}(dx^0)^2$$

En supposant que la lumière se propage à la vitesse limite, d'après (31) p. 76 l'intervalle est nul :

$$g_{ij}dx^i dx^j + 2g_{0i}dx^0 dx^i + g_{00}(dx^0)^2 = 0$$

Cherchons pour quelles valeurs de dx^0 cette équation est vérifiée. Le discrimant réduit de cette équation du second degré en dx^0 s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta' &= b'^2 - ac \\ &= g_{0i}^2(dx^i)^2 - g_{00}g_{ij}dx^i dx^j\end{aligned}$$

Les deux racines de l'équations sont :

$$\begin{aligned}dx^0_\pm &= (-b' \pm \sqrt{\Delta'})/a \\ &= \left(-g_{0i}dx^i \pm \sqrt{g_{0i}^2(dx^i)^2 - g_{00}g_{ij}dx^i dx^j}\right)/g_{00}\end{aligned}$$

En remplaçant $g_{0i}dx^i$ par $g_{0j}dx^j$:

$$\begin{aligned}dx^0_\pm &= \left(-g_{0i}dx^i \pm \sqrt{g_{0i}g_{0j}dx^i dx^j - g_{00}g_{ij}dx^i dx^j}\right)/g_{00} \\ &= \left[-g_{0i}dx^i \pm \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})dx^i dx^j}\right]/g_{00}\end{aligned}$$

$x^0 + dx^0_-$ est la coordonnées temporelle de l'évènement émission du signal, et $x^0 + dx^0_+$ est la coordonnées temporelle de l'évènement réception du signal. « L'intervalle de temps » entre les deux évènements s'écrit :

$$dx^0_+ - dx^0_- = \tfrac{2}{g_{00}}\sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})dx^i dx^j}$$

Avec (231) p. 340 nous avons l'intervalle de temps propre :

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}(dx^0_+ - dx^0_-)/c$$

que l'on multiplie par $c/2$ pour avoir la distance spatiale :

$$\begin{aligned}dl &= \sqrt{g_{00}}(dx^0_+ - dx^0_-)/2 \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{g_{00}}}\sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})dx^i dx^j} \\ dl^2 &= \tfrac{1}{g_{00}}(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})dx^i dx^j \\ &= \left(\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}\right)dx^i dx^j \\ &= \gamma_{ij}dx^i dx^j\end{aligned} \tag{233}$$

où

$$\gamma_{ij} = \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}$$

est la métrique tridimentionnelle de l'espace exprimée en fonction de celle quadridimentionnelle de l'espace-temps. En général les $g_{\lambda\mu}$ dépendent de x^0 de sorte que la métrique spatiale dépend du temps. Dans ce cas on ne peut intégrer dl car sa valeur dépend de la ligne d'univers choisie entre les deux évènements. En relativité générale la notion de distance perd donc sa signification, sauf lorsque les $g_{\lambda\mu}$ ne dépendent pas du temps.

Remarque 60. *Lorsque le champ de gravitation tend vers zéro, l'espace-temps devient celui pseudo-euclidien de la relativité restreinte avec les g_{0i} nuls et $g_{00} = 1$. Nous retrouvons alors*

$$\gamma_{ij} = -g_{ij}$$

Le signe négatif est dû au choix de la signature de la métrique.

La relation (51) p. 102

$$g^{\lambda\nu} g_{\nu\mu} = \delta^{\lambda}_{\mu}$$

vraie lorsque les paramètres λ et μ prennent les valeurs $0, 1, 2, 3$ est aussi vraie lorsque les paramètres ne prennent que les valeurs $1, 2, 3$:

$$g^{i\nu} g_{\nu j} = \delta^i_j \qquad \Leftrightarrow \qquad g^{ik} g_{kj} + g^{i0} g_{0j} = \delta^i_j \tag{234}$$

Elle est également vraie lorsqu'au moins un paramètre est nul

$$\begin{cases} g^{0\nu} g_{\nu j} = \delta^0_j \\ g^{i\nu} g_{\nu 0} = \delta^i_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g^{0k} g_{kj} + g^{00} g_{0j} = \delta^0_j \\ g^{ik} g_{k0} + g^{i0} g_{00} = \delta^i_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g^{0k} g_{kj} + g^{00} g_{0j} = 0 & j \neq 0 \\ g^{0k} g_{k0} + g^{00} g_{00} = 1 & i = j = 0 \\ g^{ik} g_{k0} + g^{i0} g_{00} = 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

$$g^{ik} g_{k0} + g^{i0} g_{00} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad g^{i0} = -\frac{g^{ik} g_{k0}}{g_{00}}$$

Reprenons (234) p. 344

$$\begin{aligned} g^{ik} g_{kj} + g^{i0} g_{0j} &= \delta^i_j \\ g^{ik} g_{kj} - \frac{g^{ik} g_{k0}}{g_{00}} g_{0j} &= \delta^i_j \\ g^{ik} \left(g_{kj} - \frac{g_{k0} g_{0j}}{g_{00}} \right) &= \delta^i_j \\ -g^{ik} \gamma_{kj} &= \delta^i_j \end{aligned}$$

$-\gamma_{kj}$ est donc l'inverse du tenseur g^{ik}. L'inverse de γ_{kj} étant γ^{kj}, nous pouvons aussi écrire

$$\gamma^{kj} = -g^{ik}$$

Le tenseur tridimentionnel $-g^{ik}$ est le tenseur métrique contravariant de la métrique (233) p. 343.

Pour synchroniser deux horloges aux points A et B précédents, nous utilisons également des signaux lumineux. L'instant x^0 au point A est simultané à l'instant au point B milieu de l'aller-retour :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\left(dx^0_- + dx^0_+\right) &= \frac{1}{2}\left\{ \frac{-g_{0i}dx^i + \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})dx^i dx^j}}{g_{00}} + \frac{-g_{0i}dx^i - \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})dx^i dx^j}}{g_{00}} \right\} \\ &= -\frac{g_{0i}dx^i}{g_{00}} \end{aligned}$$

Ainsi, l'instant x^0 au point A est simultané avec l'instant $-g_{0i}dx^i/g_{00}$ au point B. Cette relation permet de synchroniser les horloges dans un volume infinitésimal autour du point B. En procédant de proche en proche on peut synchroniser des horloges le long d'une ligne ouverte, mais pas le long d'un contour fermé. En effet, après avoir fait le tour du contour, on se trouve avec une valeur de $-g_{0i}dx^i/g_{00}$ différente de zéro. La synchronisation des horloges dans tout l'espace est a fortiori impossible, à l'exception des référentiels dans lesquels $\forall i \; g_{0i} = 0$. Cette impossibilité de synchroniser toutes les horloges dans tout l'espace n'est pas une propriété de l'espace-temps, elle est liée au choix du référentiel. Dans tout champ de gravitation il est toujours possible de choisir un référentiel tel que les quantités g_{0i} soient nulles, ce qui rend possible la synchronisation de toutes les horloges.

En relativité restreinte le cours du temps est différent pour deux horloges animées d'un mouvement relatif. En relativité générale s'ajoute le fait que le temps s'écoule différemment en différents points de l'espace d'un référentiel donné. Si deux événements E_1 et E_2 ont lieu en un point A et sont simultanés avec respectivement les deux évènements E_1' et E_2' en un point B, l'intervalle de temps propre entre E_1 et E_2 sera en général différent de l'intervalle de temps propre entre E_1' et E_2'.

Puisque nous avons supposé $dx_-^0 = dx_+^0$, la relation précédente s'écrit aussi

$$\begin{aligned} \frac{g_{00}}{2}\left(dx_+^0 + dx_-^0\right) + g_{0i}dx^i &= 0 \\ g_{00}dx^0 + g_{0i}dx^i &= 0 \\ g_{0\lambda}dx^\lambda &= 0 \\ dx_0 &= 0 \end{aligned}$$

La différentielle covariante dx_0 doit donc être nulle.

26.7 Lien potentiel gravitationnel et tenseur énergie-impulsion

Prenons le laplacien du potentiel gravitationnel g_{00} en champ faible et pour $v \ll c$:

$$\begin{aligned} \Delta g_{00} &= \Delta\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) \\ &= \frac{2}{c^2}\,\Delta\phi \end{aligned}$$

Avec l'équation de Poisson (154) p. 257 :

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi\rho\mathrm{G}}{c^2}$$

Or avec la définition (222) p. 326 du tenseur énergie-impulsion :

$$P^{00} = \rho c^2$$

En coordonnées galiléennes réduites, avec la signature $(+---)$, $P^{00} = P_{00}$:

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{c^4}\,P_{00} \tag{235}$$

26.8 Mouvement d'une particule dans un champ de gravitation

Nous cherchons l'équation du mouvement d'une particule libre de masse m dans un champ de gravitation. Nous reprenons le principe de moindre action en relativité restreinte (225) p. 328

dans lequel la présence d'un champ de gravitation est prise en compte dans l'expression de la métrique ds :

$$\begin{aligned}
-mc\delta \int_A^B ds = 0 \\
\delta \int_A^B ds = 0 \\
\int_A^B \delta ds = 0
\end{aligned}$$

À partir de (228) p. 334 :

$$\begin{aligned}
ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\
\delta ds^2 &= \delta g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu} \delta dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu} dx^\mu \delta dx^\nu \\
2ds\delta ds &= \delta g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 2 g_{\mu\nu} dx^\mu \delta dx^\nu \\
\delta ds &= \left(\frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{\delta dx^\nu}{ds} \right) ds \\
&= \left[\frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + \frac{d}{ds} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \delta x^\nu \right) - \frac{d}{ds} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \delta x^\nu \right] ds \\
\int \delta ds &= \int \left[\frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - \frac{d}{ds} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \delta x^\nu \right] ds + \int \frac{d}{ds} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \delta x^\nu \right) ds
\end{aligned}$$

Le dernier membre est nul car $\delta x^\nu(A) = \delta x^\nu(B) = 0$:

$$\begin{aligned}
\int \delta ds &= \int \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - \frac{d}{ds} \left(g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \delta x^\sigma \right] ds \\
&= \int \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} - g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \right) \delta x^\sigma ds
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)
\end{aligned}$$

$$\int \delta ds = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \right] \delta x^\sigma ds$$

On utilise les symboles de Christoffel de première espèce, relation (126) p. 225,

$$\int \delta ds = \int \left(-\Gamma_{\sigma\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \right) \delta x^\sigma ds$$

puis les symboles de Christoffel de deuxième espèce, relation (117) p. 223 :

$$\begin{aligned}\int \delta ds &= -\int \left(g_{\sigma\lambda} \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} + g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} \right) \delta x^{\sigma} ds \\ &= -\int \left(g_{\sigma\lambda} \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} + g_{\lambda\sigma} \frac{d^2 x^{\lambda}}{ds^2} \right) \delta x^{\sigma} ds \\ &= -\int g_{\sigma\lambda} \left(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} + \frac{d^2 x^{\lambda}}{ds^2} \right) \delta x^{\sigma} ds\end{aligned}$$

La variation de l'action étant nulle pour des variations arbitraires des coordonnées δx^{σ}, nous retrouvons l'équation (163) p. 266 d'une géodésique :

$$\forall \lambda = 0, 1, 2, 3 \qquad \frac{d^2 x^{\lambda}}{ds^2} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0$$

Nous pouvons obtenir ce résultat par un raisonnement beaucoup plus direct. En relativité restreinte une particule est libre si sa quadriaccélération est nulle, relation (227) p. 329 :

$$\frac{du_{\lambda}}{ds} = 0$$

En relativité générale le champ de gravitation courbe l'espace-temps, ce qui revient à prendre un système de coordonnées curviligne. La dérivée ordinaire est remplacée par une dérivée absolue :

$$\begin{aligned}\forall \lambda = 0, 1, 2, 3 \qquad \frac{Du^{\lambda}}{ds} &= 0 \\ \frac{du^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} u^{\mu} dx^{\nu}}{ds} &= 0 \\ \frac{d^2 x^{\lambda}}{ds^2} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} &= 0 \qquad (236)\end{aligned}$$

C'est l'équation du mouvement d'une particule libre dans un champ de gravitation.

26.9 Les équations du champ de gravitation

26.9.1 Cas intérieur

Nous cherchons à établir une relation entre champ de gravitation et matière qui généralise les équations de Poisson (154) p. 257 et de Laplace. Ces équations différentielles déterminent localement le potentiel newtonien dans les cas intérieur et extérieur à la distribution de matière. Nous cherchons cette relation sous une forme covariante générale, c'est-à-dire tensorielle. Commençons par l'équation du champ en dehors de la matière (cas extérieur). Supposons que le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel (paragraphe 23.4.4 p. 278) soit nul

$$R_{\mu\nu,\lambda\sigma} = 0$$

Dans ce cas, on peut toujours effectuer un changement de coordonnées pour rendre constants les potentiels de gravitation $g_{\mu\nu}$ et nuls les symboles de Christoffel. Les géodésiques sont alors des lignes droites dans l'espace-temps et dans l'espace. C'est l'espace-temps plat pseudo-euclidien de la relativité restreinte, sans courbure ni gravitation. Par exemple, dans notre système solaire, à l'extérieur de la matière du Soleil et des planètes, ces dernières se déplaceraient en ligne droite à vitesse constante. On rejète donc cette hypothèse.

Supposons que le tenseur de courbure de Ricci (paragrape 23.4.9 p. 289) soit nul.

$$R_{\mu\sigma} = 0 \tag{237}$$

Cette hypothèse est moins contraignante car on peut avoir $R_{\mu\nu,\lambda\sigma} \neq 0$ bien que le tenseur de Ricci soit nul. Cette relation conduit à des équations aux dérivées partielles du second ordre pour les potentiels de gravitation (autrement dit contenant les potentiels de gravitation ainsi que leurs dérivées premières et secondes), dans lesquelles les dérivées secondes interviennent linéairement. En cela elle ressemble à l'équation de Laplace $\Delta\phi = 0$ (relation (155) p. 258). Nous conservons cette hypothèse.

Cherchons maintenant les équations à l'intérieur de la matière sous la forme d'une égalité entre tenseurs de l'espace-temps,

$$\forall \mu, \nu \quad S_{\mu\nu} = \chi Q_{\mu\nu}$$

où d'après (235) p. 345 :

$$\forall \mu, \nu \quad S_{\mu\nu} = \frac{8\pi \mathrm{G}}{c^4} Q_{\mu\nu}$$

Le tenseur $Q_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion total des distributions de matière et d'énergie. Il décrit en chaque point d'univers la distribution de matière et d'énergie (cas intérieur). Dans les régions vides de matière et d'énergie (cas extérieur) il est identiquement nul et nous devons retrouver (237) p. 348, donc $S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$. Le tenseur $Q_{\mu\nu}$ étant d'ordre deux, le tenseur $S_{\mu\nu}$ est aussi d'ordre deux.

Dans l'hypothèse d'un milieu continu avec interactions électromagnétiques nous avons

$$\forall \mu, \nu \quad Q_{\mu\nu} = P_{\mu\nu} + M_{\mu\nu}$$

où $P_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion du milieu continu (définition (222) p. 326) et $M_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique. $P_{\mu\nu}$ et $M_{\mu\nu}$ étant symétriques, $Q_{\mu\nu}$ l'est aussi. Par conséquent le tenseur que nous cherchons $S_{\mu\nu}$ est aussi symétrique. La gravitation n'étant pas modélisée par une force, les f^i sont nulles et les équations (221) p. 326 deviennent :

$$\forall \mu, \nu \quad \nabla_\nu P^{\mu\nu} = 0$$

La divergence du tenseur énergie-impulsion du milieu continu est nulle car il se conserve, ainsi que celle de $Q_{\mu\nu}$ qui généralise $P_{\mu\nu}$

$$\forall \mu, \nu \quad \nabla_\nu Q^{\mu\nu} = 0$$

Ils sont dits *conservatifs*. Cette étude valable en relativité restreinte est valable localement pour l'espace-temps de la relativité générale en prenant une métrique pseudo-euclidienne osculatrice à V_4. Par conséquent $S_{\mu\nu}$ est aussi de divergence nulle :

$$\forall \mu, \nu \quad \nabla_\nu S^{\mu\nu} = 0$$

$S_{\mu\nu}$ est un tenseur purement géométrique ne dépendant que de la métrique, c'est-à-dire des potentiels de gravitation et de leurs dérivées (par rapport aux coordonnées). Si on utilise le tenseur métrique et uniquement ses dérivées premières, alors aucun nouveau tenseur ne peut être construit. En effet, en chaque point on peut trouver un système de coordonnées (géodésiques) dans lequel les dérivées premières du tenseur métrique sont nulles. Le tenseur cherché est alors égale au tenseur métrique lui-même, ou à son inverse, ou à $\epsilon^{ijkl}/\sqrt{g}$ (où ϵ^{ijkl} est le tenseur d'antisymétrie), etc. Cette égalité entre tenseur étant vraie dans un système de coordonnées, elle est vraie dans tout système de coordonnées. Nous utilisons donc le tenseur métrique ainsi que ses dérivées premières et secondes. Le tenseur de courbure de Ricci dépend des potentiels de gravitation et est symétrique d'ordre deux mais n'est pas de divergence nulle, en revanche le tenseur d'Einstein (184) p. 296 est symétrique d'ordre deux, conservatif et dépendant des potentiels de gravitation.

Élie Cartan a montré que de façon générale les tenseurs satisfaisant aux conditions précédentes sont donnés par

$$\forall\mu,\nu \quad S_{\mu\nu} = \alpha\left[R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,g_{\mu\nu}(R+\beta)\right]$$

où α et β sont des constantes, $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de courbure de Ricci, R est sa courbure riemannienne scalaire. Nous obtenons :

$$\forall\mu,\nu \quad R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,g_{\mu\nu}(R+\beta) = \chi Q_{\mu\nu}$$
$$\forall\mu,\nu \quad R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R + \tfrac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\lambda = \chi Q_{\mu\nu}$$

où l'on supprime la constante α puisqu'il y a déjà la constante χ. La constante $\lambda = -\frac{1}{2}\beta$ est appelée *constante cosmologique*. Sauf dans certaines études cosmologiques très spéciales, on n'envisage en théorie relativiste de la gravitation que le cas $\lambda = 0$. Nous avons alors les équations du champ gravitationnel :

$$\boxed{\forall\mu,\nu \quad R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi\mathrm{G}}{c^4}Q_{\mu\nu}} \tag{238}$$

26.9.2 Cas extérieur

Les équations du champ de gravitation libre, c'est-à-dire à l'extérieur des masses qui l'engendrent s'écrivent :

$$\boxed{\forall\mu,\nu \quad R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R = 0}$$

En passant en composantes mixtes :

$$\forall\nu,\nu \quad g^{\nu\mu}R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,g^{\nu\mu}g_{\mu\nu}R = \chi g^{\nu\mu}Q_{\mu\nu}$$
$$R^{\nu}_{\nu} - \tfrac{1}{2}\,\delta^{\nu}_{\nu}R = \chi Q^{\nu}_{\nu}$$

où l'on utilise la notation 20 p. 195 des tenseurs symétriques. En contractant les indices ν et ν,

$$\forall\nu, \quad R^{\nu}_{\nu} - \tfrac{1}{2}\,\delta^{\nu}_{\nu}R = \chi Q^{\nu}_{\nu}$$

Par définition de la courbure scalaire (23.4.5) p. 294, $R^{\nu}_{\nu} = R$. De même la contraction $Q^{\nu}_{\nu} = Q$ est appelée *scalaire de Laue*. D'après la relation 52 p. 102, pour un espace à 4 dimensions, $\delta^{\nu}_{\nu} = 4$, on a alors :

$$R - 2R = \chi Q$$
$$R = -\chi Q$$

Cette dernière relation permet d'écrire les équations équivalentes aux équations (238) p. 349 :

$$\boxed{\forall\mu,\nu \quad R_{\mu\nu} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{c^4}\left(Q_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,g_{\mu\nu}Q\right)}$$

Dans un espace vide $Q_{\mu\nu} = 0$, nous retrouvons (237) p. 348 :

$$\boxed{\forall\mu,\nu \qquad R_{\mu\nu} = 0} \tag{239}$$

Comme nous l'avons déjà mentionné, cela ne signifie pas que l'espace-temps vide de matière et d'énergie soit plat (il est déformé par de la matière ou de l'énergie « plus loin »), car pour cela il faudrait que le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel soit nul, c'est-à-dire les conditions plus restrictives $R_{\mu\nu,\lambda\sigma} = 0$.

26.10 Principe de moindre action en relativité générale

26.10.1 Cas extérieur

Le principe de moindre action est la méthode historique utilisée par David Hilbert pour établir les équations du champ de gravitation. Par analogie avec le principe de moindre action qui donne les équations de la dynamique de Newton, nous supposons que les équations du champ de gravitation à l'extérieur des masses et de l'énergie qui l'engendrent, dérivent (sont issues) d'un principe de moindre action. Il s'agit de trouver l'action S_g du champ de gravitation comme fonction des potentiels de gravitation $g_{\mu\nu}$, invariante par changement de coordonnées pour assurer l'invariance des équations du champ de gravitation, puis de poser l'hypothèse que la variation de cette action est nulle lors d'une variation des potentiels de gravitation :

$$\delta S_g = 0$$

Pour trouver l'expression de S_g, partons de l'invariance de l'hypervolume par changement de coordonnées, (160) p. 263 :

$$\sqrt{|g|}\, d\Omega = \sqrt{|g'|}\, d\Omega'$$
$$\int \mathcal{L}_g \sqrt{|g|}\, d\Omega = \int \mathcal{L}'_g \sqrt{|g'|}\, d\Omega'$$

où le lagrangien du champ de gravitation $\mathcal{L}_g$ est un scalaire, donc un invariant. Le déterminant g étant négatif d'après (33) p.76, nous avons la forme de l'action cherchée :

$$S_g = \kappa \int \mathcal{L}_g \sqrt{-g}\, d\Omega$$

où κ est une constante. Il s'agit à présent de trouver l'expression du lagrangien $\mathcal{L}_g$. Par analogie avec l'équation de Laplace du potentiel du champ de gravitation dans le cas extérieur $\Delta\phi = 0$ (relation (155) p. 258), nous cherchons les équations du champ de gravitation sous forme d'équations différentielles du second ordre par rapport aux potentiels de gravitation $g_{\mu\nu}$. Autrement dit $\mathcal{L}_g$ doit être du premier ordre car on prend sa variation. Il n'existe pas de scalaire formé à partir des $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées premières $\partial_k g_{\mu\nu}$ (ou des symboles de Christoffel). Ces derniers peuvent toujours être annulés en un point en prenant un système de coordonnées localement géodésique en ce point. En revanche le scalaire de courbure riemannienne R, ainsi que $\alpha R + \beta$ où α et β sont des constantes, contiennent les dérivées secondes des $g_{\mu\nu}$ de manière linéaire, ce qui fait qu'elles disparaissent lors de la variation. Dans un premier temps on suppose que le lagrangien est la courbure scalaire. Avec la définition de la courbure scalaire R 23.4.5 p. 294 :

$$\begin{aligned}
S_g &= \kappa \int \sqrt{-g}\, R d\Omega \\
\delta S_g &= \kappa \int \delta\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\right) d\Omega \\
\tfrac{1}{\kappa}\,\delta S_g &= \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\, R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} d\Omega \\
&= \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta\sqrt{-g} d\Omega + \int \sqrt{-g}\, R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} d\Omega + \int \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} d\Omega
\end{aligned}$$

— Calculons la première intégrale grâce à la relation (57) p. 104 qui donne δg :

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{-g} &= \frac{-\delta g}{2\sqrt{-g}} \\ &= \frac{-g}{2\sqrt{-g}}\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\end{aligned}$$

Avec la relation (52) p. 102

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} &= 1 \\ \delta\left(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\right) &= 0 \\ g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{-g} &= \frac{g}{2\sqrt{-g}}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{\sqrt{-g}\sqrt{-g}}{2\sqrt{-g}}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\delta\sqrt{-g}d\Omega &= \int R\delta\sqrt{-g}d\Omega \\ &= -\frac{1}{2}\int g_{\mu\nu}R\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}d\Omega\end{aligned}$$

— Calculons la troisième intégrale en nous plaçant dans un système de coordonnées localement géodésiques. Le tenseur de courbure de Ricci, définition 23.4.4 p. 289 se simplifie. Les symboles de Christoffel sont nuls, mais pas leur dérivée :

$$\begin{aligned}\forall\mu,\sigma \quad R_{\mu\sigma} &= \partial_\lambda\Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} - \partial_\sigma\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} + \Gamma^\xi{}_{\sigma\mu}\Gamma^\lambda{}_{\lambda\xi} - \Gamma^\xi{}_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda{}_{\sigma\xi} \\ &= \partial_\lambda\Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} - \partial_\sigma\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} \\ \forall\mu,\sigma \quad \delta R_{\mu\sigma} &= \delta\left(\partial_\lambda\Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} - \partial_\sigma\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}\lambda\right) \\ &= \partial_\lambda\delta\Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} - \partial_\sigma\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} \\ &= D_\lambda\delta\Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} - D_\sigma\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}\end{aligned}$$

car lorsque les symboles de Christoffel sont nuls, la dérivée covariante se réduit à la dérivée partielle ordinaire. C'est une équation tensorielle, donc valable dans tous système de coordonnées, pas seulement localement géodésique.

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\left(D_\lambda\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - D_\nu\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}\right) \\ &= g^{\mu\nu}D_\lambda\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - g^{\mu\nu}D_\nu\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}\end{aligned}$$

La dérivation covariante du tenseur métrique étant nulle :

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= D_\lambda\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\right) - D_j\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}\right) \\ &= D_\lambda\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\right) - D_\lambda\left(g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu{}_{\nu\mu}\right) \\ &= D_\lambda\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu{}_{\nu\mu}\right)\end{aligned}$$

En remplaçant et en utilisant le théorème de la divergence sous forme tensorielle (153) p. 255 :

$$\begin{aligned}\int \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} d\Omega &= \int \sqrt{-g}\, D_\lambda \left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu{}_{\nu\mu}\right) d\Omega \\ &= \oint \sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu{}_{\nu\mu}\right) d\sigma_\lambda \\ &= 0\end{aligned}$$

Cette intégrale est nulle car calculée sur l'hypersurface délimitant l'hypervolume d'intégration sur laquelle les variations du champ sont nulles conformément au principe de moindre action.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\kappa}\,\delta S_g &= -\frac{1}{2}\int g_{\mu\nu} R\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu} d\Omega + \int \sqrt{-g}\, R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} d\Omega \\ \delta S_g &= \kappa \int \left(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R\right)\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu} d\Omega\end{aligned}$$

Les variations $\delta g^{\mu\nu}$ étant arbitraires, on en déduit les équations du champ de gravitation dans le cas extérieur :

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R &= 0 \\ S_{\mu\nu} &= 0\end{aligned}$$

Chaque composante du tenseur $S_{\mu\nu}$ est nulle, ce qui donne 16 relations. Nous avons vu que par symétrie des tenseurs $R_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$, le tenseur S est symétrique. Par conséquent, parmi les 16 composantes de ce tenseur, seules 10 sont distinctes et ne restent que 10 relations indépendantes (par exemple la relation $S_{02} = 0$ est équivalente à la relation $S_{20} = 0$). De plus la relation (51) p. 102 et la nullité de la divergence du tenseur d'Einstein (183) p. 296 donnent :

$$\begin{aligned}g^{\lambda\mu} R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} R &= 0 \\ R^{\lambda}{}_{\nu} - \tfrac{1}{2}\,\delta^\lambda_\nu R &= 0 \\ \forall\lambda = 0,\ldots,3 \qquad \nabla_\lambda\left(R^{\lambda}{}_{\nu} - \tfrac{1}{2}\,\delta^\lambda_\nu R\right) &= 0\end{aligned}$$

Ces 4 relations lient les 10 composantes de $S_{\mu\nu}$ restantes, il n'y a donc que 6 relations distinctes, qui correspondent aux 6 composantes indépendantes du tenseur métrique.

26.10.2 Lagrangien du champ de gravitation

Nous allons voir que le lagrangien a une expression plus simple que la courbure scalaire. Avec la définition de la courbure scalaire R 23.4.5 p. 294 puis celle du tenseur de courbure de Ricci $R_{\mu\nu}$ 23.4.4 p. 289 :

$$\begin{aligned}R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ \sqrt{-g}\, R &= \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\left(\partial_\lambda\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \partial_\nu\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} + \Gamma^\xi{}_{\nu\mu}\Gamma^\lambda{}_{\lambda\xi} - \Gamma^\xi{}_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda{}_{\nu\xi}\right)\end{aligned}$$

On intègre par partie le premier et le deuxième terme dans la parenthèse :

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\, R = \partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\right) - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right) \\ + \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right) - \partial_\nu\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}\right) \\ + \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\xi{}_{\nu\mu}\Gamma^\lambda{}_{\lambda\xi} - \Gamma^\xi{}_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda{}_{\nu\xi}\right)\end{aligned}$$

Réorganisons les termes et intégrons :

$$\int \sqrt{-g}\, R d\Omega = \int \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\mu}\partial_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right) - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\partial_\lambda \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right) + \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \left(\Gamma^{\xi}{}_{\nu\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\xi} - \Gamma^{\xi}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\xi}\right) d\Omega$$
$$+ \int \partial_\lambda \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\right) - \partial_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\mu}\right) d\Omega$$

En utilisant le théorème de la divergence sous forme tensorielle (153) p. 255, le dernier terme s'écrit :

$$\begin{aligned}\int \partial_\lambda \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\right) - \partial_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\mu}\right) d\Omega &= \int \partial_\lambda \left[\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda}\Gamma^{\nu}{}_{\nu\mu}\right)\right] d\Omega \\ &= \oint \sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} - g^{\mu\lambda}\Gamma^{\nu}{}_{\nu\mu}\right) d\sigma^r\end{aligned}$$

Sa variation est nulle car l'intégrale est évaluée sur l'hypersurface délimitant l'hypervolume d'intégration sur laquelle la variation du champ est nulle conformément au principe de moindre action. Il reste

$$\int \sqrt{-g}\, R d\Omega = \int \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\mu}\partial_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right) - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\partial_\lambda \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right) + \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \left(\Gamma^{\xi}{}_{\nu\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\xi} - \Gamma^{\xi}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\xi}\right) d\Omega$$

— Le premier terme sous l'intégrale s'écrit :

$$\begin{aligned}\partial_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right) &= g^{\mu\nu}\partial_\nu \left(\sqrt{-g}\right) + \sqrt{-g}\, \partial_\nu g^{\mu\nu} \\ &= -g^{\mu\nu}\, \frac{\partial_\nu g}{2\sqrt{-g}} + \sqrt{-g}\, \partial_\nu g^{\mu\nu}\end{aligned}$$

Avec la relation (58) p. 104 donnant $\partial_\nu g$:

$$\begin{aligned}\partial_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right) &= -g^{\mu\nu}\, \frac{g}{2\sqrt{-g}}\, g^{\lambda\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \sqrt{-g}\, \partial_\nu g^{\mu\nu} \\ &= -g^{\mu\nu}\, \frac{-\sqrt{-g}\sqrt{-g}}{2\sqrt{-g}}\, g^{\lambda\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \sqrt{-g}\, \partial_\nu g^{\mu\nu} \\ &= \tfrac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, g^{\lambda\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \sqrt{-g}\, \partial_\nu g^{\mu\nu} \\ &= \sqrt{-g}\left(\tfrac{1}{2}\, g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\nu g^{\mu\nu}\right)\end{aligned}$$

Avec la relation (51) p. 102 sur le symbole de Kronecker :

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu} &= g^{\mu\lambda}\delta^{\nu}_{\lambda} \\ &= g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}g_{\lambda\sigma} \\ \partial_\nu g^{\mu\nu} &= \partial_\nu g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}g_{\lambda\sigma} + g^{\mu\lambda}\partial_\nu g^{\nu\sigma}g_{\lambda\sigma} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma} \\ &= \partial_\nu g^{\mu\lambda}\delta^{\nu}_{\lambda} + \delta^{\mu}_{\sigma}\partial_\nu g^{\nu\sigma} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma} \\ &= \partial_\nu g^{\mu\nu} + \partial_\nu g^{\mu\nu} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma} \\ &= -g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma}\end{aligned}$$

Donc

$$\partial_\nu \left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right) = \sqrt{-g}\left(\tfrac{1}{2}\, g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma}\right)$$

Avec la relation donnant les symboles de Christoffel de deuxième espèce en fonction du tenseur métrique (127) p. 225 :

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu} &= \tfrac{1}{2}\, g^{\mu\lambda}\left(\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\sigma g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\sigma\nu}\right) \\
g^{\sigma\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu} &= g^{\mu\lambda}\left(\tfrac{1}{2}\, g^{\sigma\nu}\,\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \tfrac{1}{2}\, g^{\sigma\nu}\,\partial_\sigma g_{\nu\lambda} - \tfrac{1}{2}\, g^{\sigma\nu}\,\partial_\lambda g_{\sigma\nu}\right) \\
&= g^{\mu\lambda}\left(g^{\sigma\nu}\partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \tfrac{1}{2}\, g^{\sigma\nu}\,\partial_\lambda g_{\sigma\nu}\right) \\
&= g^{\mu\lambda} g^{\sigma\nu}\partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \tfrac{1}{2}\, g^{\mu\lambda} g^{\sigma\nu}\partial_\lambda g_{\sigma\nu} \\
&= g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \tfrac{1}{2}\, g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma}\partial_\nu g_{\lambda\sigma}
\end{aligned}$$

Donc

$$\partial_\nu\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right) = -\sqrt{-g} g^{\sigma\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu}$$

— Le deuxième terme sous l'intégrale s'écrit :

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right) &= g^{\mu\nu}\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\right) + \sqrt{-g}\,\partial_\lambda g^{\mu\nu} \\
&= g^{\mu\nu}\frac{-\partial_\lambda g}{2\sqrt{-g}} + \sqrt{-g}\,\partial_\lambda g^{\mu\nu} \\
&= \tfrac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, g^{\xi\omega}\partial_\lambda g_{\xi\omega} + \sqrt{-g}\,\partial_\lambda g^{\mu\nu} \\
&= \sqrt{-g}\left(\tfrac{1}{2}\, g^{\mu\nu} g^{\xi\omega}\partial_\lambda g_{\xi\omega} + \partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Ricci en composantes contravariantes (144) p. 242 et en appliquant la relation (142) p. 241 :

$$\begin{aligned}
D g^{\mu\nu} &= 0 \\
\partial_\lambda g^{\mu\nu} + g^{\mu\xi}\,\Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} + g^{\nu\xi}\,\Gamma^{\mu}{}_{\xi\lambda} &= 0
\end{aligned}$$

D'où :

$$\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right) = \sqrt{-g}\left(\tfrac{1}{2}\, g^{\mu\nu} g^{\xi\omega}\partial_\lambda g_{\xi\omega} - g^{\mu\xi}\,\Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} - g^{\nu\xi}\,\Gamma^{\mu}{}_{\xi\lambda}\right)$$

On utilise la forme particulière des symboles de Christoffel, (128) p. 226 :

$$\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right) = \sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\xi}{}_{\xi\lambda} - g^{\mu\xi}\,\Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} - g^{\nu\xi}\,\Gamma^{\mu}{}_{\xi\lambda}\right)$$

L'intégrale devient :

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{-g}\, R d\Omega = \int & -\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\mu}\sqrt{-g} g^{\sigma\nu}\,\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\xi}{}_{\xi\lambda} - g^{\mu\xi}\,\Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} - g^{\nu\xi}\,\Gamma^{\mu}{}_{\xi\lambda}\right) \\
& + \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\left(\Gamma^{\xi}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\xi} - \Gamma^{\xi}{}_{\lambda\mu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\xi}\right) d\Omega
\end{aligned}$$

Factorisons $\sqrt{-g}$ et développons le reste :

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{-g}\, R d\Omega &= \int \sqrt{-g}\left(-g^{\sigma\nu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu} - g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\xi}{}_{\xi\lambda} + g^{\mu\xi}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} + g^{\nu\xi}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\mu}{}_{\xi\lambda}\right. \\
&\qquad \left. + g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\xi}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\xi} - g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\xi}{}_{\lambda\mu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\xi}\right) d\Omega \\
&= \int \sqrt{-g}\left(-g^{\sigma\nu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu} + g^{\mu\xi}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} + g^{\nu\xi}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\mu}{}_{\xi\lambda} - g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\xi}{}_{\lambda\mu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\xi}\right) d\Omega \\
&= \int \sqrt{-g}\left(2 g^{\mu\xi}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\,\Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} - g^{\sigma\nu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\mu}\,\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\nu} - g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\xi}{}_{\lambda\mu}\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\xi}\right) d\Omega
\end{aligned}$$

Effectuons le changement d'indices $\sigma \rightleftarrows \mu$ et $\nu \rightleftarrows \xi$ dans le deuxième terme, et $\nu \to \xi$ et $\xi \to \sigma$ dans le troisième :

$$\int \sqrt{-g}\, R d\Omega = \int \sqrt{-g} \left(2g^{\mu\xi}\, \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\, \Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} - g^{\mu\xi}\, \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\sigma}\, \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\xi} - g^{\mu\xi}\, \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu}\, \Gamma^{\lambda}{}_{\xi\sigma} \right) d\Omega$$

Ajoutons le terme nul $\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\sigma}\, \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\xi} - \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\sigma}\, \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\xi}$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{-g}\, R d\Omega &= \int \sqrt{-g} g^{\mu\xi} \left[2\left(\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\, \Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\sigma}\, \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\xi} \right) - \left(\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\, \Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\sigma}\, \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\xi} \right) \right] d\Omega \\ &= \int \sqrt{-g} g^{\mu\xi} \left(\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\, \Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\sigma}\, \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\xi} \right) d\Omega\end{aligned}$$

Nous obtenons l'expression du lagrangien du champ de gravitation :

$$\mathcal{L}_g = g^{\mu\xi} \left(\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\, \Gamma^{\nu}{}_{\xi\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\sigma}\, \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\xi} \right)$$

26.10.3 Constante cosmologique

Si à la place de R nous prenons la combinaison linéaire $\alpha R + \beta$ avec α et β des constantes, nous avons :

$$S_g = \kappa \int \sqrt{-g}\, (\alpha R + \beta) d\Omega$$

Or nous devons retrouver

$$S_g = \kappa \int \sqrt{-g}\, R d\Omega$$

lorsque la constante β est nulle, donc $\alpha = 1$. Les équations s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}(R + \beta) &= 0 \\ R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\beta) &= 0 \\ R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}$$

où $\lambda = -\frac{1}{2}\,\beta$ est appelée *constante cosmologique*. Si cette constante est non nulle, sa valeur est très faible et par conséquent n'intervient quasiment pas localement mais uniquement en cosmologie, d'où son nom.

26.10.4 Cas intérieur

Dans le cas intérieur, pour déterminer les équations du champ de gravitation dans la matière ou en présence de rayonnement électromagnétique, nous devons ajouter à l'action du champ de gravitation S_g, l'action pour la matière et le champ électromagnétique S_e (« e » pour énergie), telle que :

$$\begin{aligned} \delta(S_g + S_e) &= 0 \\ \delta S_g + \delta S_e &= 0 \\ \delta S_e &= 0 \end{aligned}$$

On suppose que l'action s'écrit

$$S_e = \kappa' \int \mathcal{L}_e \sqrt{-g}\, d\Omega$$

où le lagrangien $\mathcal{L}_e$ est fonction du tenseur métrique et de ses dérivées premières :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_e &= \mathcal{L}_e(g_{\mu\nu}, \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\ &= \mathcal{L}_e(g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu})\end{aligned}$$

La variation de l'action s'écrit

$$\begin{aligned}\delta S_e &= \kappa' \int \delta(\mathcal{L}_e\sqrt{-g})\, d\Omega \\ \tfrac{1}{\kappa'}\,\delta S_e &= \int \frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\,\delta\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right) d\Omega \\ &= \int \frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu} d\Omega + \int \frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\,\delta\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right) d\Omega\end{aligned}$$

On intègre par partie le second terme du membre de droite :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\kappa'}\,\delta S_e &= \int \frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu} d\Omega + \int \partial_\lambda \left[\frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\,\delta g^{\mu\nu}\right] d\Omega - \int \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\mathcal{L}_e\sqrt{-g})}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\right] \delta g^{\mu\nu}\, d\Omega \\ &= \int \frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu} d\Omega + \int \partial_\lambda \left[\sqrt{-g}\,\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\,\delta g^{\mu\nu}\right] d\Omega - \int \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\mathcal{L}_e\sqrt{-g})}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\right] \delta g^{\mu\nu}\, d\Omega\end{aligned}$$

On utilise le théorème de la divergence sous forme tensorielle (153) p. 255 :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\kappa'}\,\delta S_e &= \int \frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu} d\Omega + \oint \sqrt{-g}\,\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\,\delta g^{\mu\nu} d\sigma_\lambda - \int \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\mathcal{L}_e\sqrt{-g})}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\right] \delta g^{\mu\nu}\, d\Omega \\ &= \int \frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu} d\Omega - \int \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\mathcal{L}_e\sqrt{-g})}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\right] \delta g^{\mu\nu}\, d\Omega\end{aligned}$$

L'intégrale sur l'hypersurface délimitant l'hypervolume d'intégration est nulle car les variations du champ y sont nulles conformément au principe de moindre action.

$$\begin{aligned}\delta S_e &= \kappa' \int \left\{\frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\mathcal{L}_e\sqrt{-g})}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\right]\right\} \delta g^{\mu\nu}\, d\Omega \\ &= \kappa' \int \tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\, T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}\, d\Omega\end{aligned}$$

où l'on a posé le tenseur impulsion-énergie

$$T_{\mu\nu} \triangleq \frac{\partial\left(\mathcal{L}_e\sqrt{-g}\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\mathcal{L}_e\sqrt{-g})}{\partial\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)}\right]$$

Nous avons alors

$$\delta(S_g + S_e) = \kappa \int \left(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R - \chi T_{\mu\nu}\right) \sqrt{-g}\, \delta g^{\mu\nu} d\Omega$$

Les variations $\delta g^{\mu\nu}$ étant arbitraires, on en déduit les équations du champ de gravitation dans le cas intérieur :

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R = \chi T_{\mu\nu}$$

26.11 Champ gravitationnel à symétrie sphérique

26.11.1 La métrique de Schwarzschild

Ce champ est créé par une distribution de matière à symétrie centrale. Lorsque la densité de matière tend vers zéro nous devons retrouver une métrique euclidienne, qui s'écrit en coordonnées sphérique

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2dt^2 - \left(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2\right) \\ &= c^2dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\right) \end{aligned}$$

Le ds^2 le plus général est donc

$$ds^2 = a(r,t)c^2dt^2 - b(r,t)dr^2 - c(r,t)\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\right) + d(r,t)drdt$$

où les fonctions a, b et d sont sans dimension, et c est homogène au carré d'une longueur. Effectuons une transformation de coordonnées de la forme générale

$$r = f_1(r',t') \qquad \text{et} \qquad t = f_2(r',t')$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions quelconques des nouvelles coordonnées r' et t'. Chaque fonction permet une condition, et l'on se débarasse du terme croisé en posant

$$d(r',t') = 0$$

La deuxième condition est

$$c(r',t') = r'^2$$

qui conserve la symétrie centrale. Les deux fonctions inconnues restantes sont écrites sous une forme exponentielle :

$$a(r',t') = e^{\alpha(r',t')} \qquad \text{et} \qquad b(r',t') = e^{\beta(r',t')}$$

Nous obtenons le ds^2 de la métrique de Schwarzschild

$$ds^2 = e^{\alpha}c^2dt^2 - e^{\beta}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\right)$$

où les nouvelles coordonnées sont écrites sans les primes. Nous retrouvons l'expression du tenseur métrique de Schwarzschild, (55) p. 103 :

$$G\begin{bmatrix} e^{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Avec le tenseur métrique, calculons les symboles de Christoffel de seconde espèce, relation (132) p. 230, le point désignant la dérivation par rapport à ct et le prime celle par rapport à r :

$$\begin{cases} \Gamma^0{}_{00} = \frac{1}{2}\,\dot{\alpha} \\ \Gamma^0{}_{01} = \frac{1}{2}\,\alpha' \\ \Gamma^0{}_{11} = \frac{1}{2}\,\dot{\beta}e^{\beta-\alpha} \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^1{}_{11} = \frac{1}{2}\,\beta' \\ \Gamma^1{}_{10} = \frac{1}{2}\,\dot{\beta} \\ \Gamma^1{}_{00} = \frac{1}{2}\,\alpha' e^{\alpha-\beta} \\ \Gamma^1{}_{22} = -re^{-\beta} \\ \Gamma^1{}_{33} = -r\sin^2(\theta)e^{-\beta} \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^2{}_{21} = 1/r \\ \Gamma^2{}_{33} = -\sin(\theta)\cos(\theta) \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma^3{}_{31} = 1/r \\ \Gamma^3{}_{32} = \cot(\theta) \end{cases}$$

Puis nous calculons les composantes covariantes du tenseur de Ricci, exercice 23.4.7 p. 291 :

$$\begin{cases} R_{00} = -\frac{1}{2}\ddot{\beta} + \frac{1}{4}\dot{\alpha}\dot{\beta} - \frac{1}{4}\dot{\beta}^2 + \left(\frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\alpha'^2 - \frac{1}{4}\alpha'\beta' + \frac{1}{r}\alpha'\right)e^{\alpha-\beta} \\ R_{10} = \frac{\dot{\beta}}{r} \\ R_{11} = -\frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\beta'\alpha' + \frac{1}{r}\beta' - \frac{1}{4}\alpha'^2 + \left(\frac{1}{2}\ddot{\beta} + \frac{1}{4}\dot{\beta}^2 - \frac{3}{4}\dot{\beta}\dot{\alpha}\right)e^{\beta-\alpha} \\ R_{22} = -\left[1 + \frac{r}{2}(\alpha' - \beta')\right]e^{-\beta} + 1 \end{cases}$$

On applique les équations du champ de gravitation dans le cas extérieur (239) p. 349 :

$$\forall \mu, \nu \qquad R_{\mu\nu} = 0$$

soit,

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\ddot{\beta} + \frac{1}{4}\dot{\alpha}\dot{\beta} - \frac{1}{4}\dot{\beta}^2 + \left(\frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\alpha'^2 - \frac{1}{4}\alpha'\beta' + \frac{1}{r}\alpha'\right)e^{\alpha-\beta} = 0 \\ \frac{\dot{\beta}}{r} = 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\beta'\alpha' + \frac{1}{r}\beta' - \frac{1}{4}\alpha'^2 + \left(\frac{1}{2}\ddot{\beta} + \frac{1}{4}\dot{\beta}^2 - \frac{3}{4}\dot{\beta}\dot{\alpha}\right)e^{\beta-\alpha} = 0 \\ -\left[1 + \frac{r}{2}(\alpha' - \beta')\right]e^{-\beta} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\alpha'^2 - \frac{1}{4}\alpha'\beta' + \frac{1}{r}\alpha' = 0 \\ \dot{\beta} = 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha'' + \frac{1}{4}\beta'\alpha' + \frac{1}{r}\beta' - \frac{1}{4}\alpha'^2 = 0 \\ 1 + \frac{r}{2}(\alpha' - \beta') = e^{\beta} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \alpha' + \beta' = 0 \\ \beta = \beta(r) \\ 1 - r\beta' = e^{\beta} \\ 1 + r\alpha' = e^{\beta} \end{cases}$$

Cherchons les expressions de e^{α} et de e^{β}. On pose

$$\begin{aligned} y &= e^{-\beta} \\ y' &= -\beta' e^{-\beta} \\ y + ry' &= e^{-\beta} - r\beta' e^{-\beta} \\ &= (1 - r\beta')\, e^{-\beta} \end{aligned}$$

La troisième relation s'écrit

$$\begin{aligned} (1 - r\beta')\, e^{-\beta} &= 1 \\ y + ry' &= 1 \end{aligned}$$

y est de la forme $y = Ar^{-1} + B$:

$$\begin{aligned} Ar^{-1} + B + r\left(r_s/r^2\right) &= 1 \\ B &= 1 \end{aligned}$$

donc A est homogène à r, une longueur. Revenons à la variable de départ :

$$\begin{aligned} y &= Ar^{-1} + 1 \\ e^{-\beta} &= Ar^{-1} + 1 \end{aligned}$$

Cherchons l'expression de e^{α} :

$$\begin{aligned} \alpha' + \beta' &= 0 \\ \alpha + \beta &= \kappa(t) \end{aligned}$$

Comme α et β, κ est sans dimension.

$$\begin{aligned} e^{\alpha+\beta} &= e^{\kappa} \\ e^{\alpha} &= e^{\kappa}e^{-\beta} \end{aligned}$$

Pour déterminer la constante κ, remarquons que lorsque l'on s'éloigne à l'infini de la distribution de masse qui crée la champ de gravitation, la métrique doit redevenir euclidienne :

$$\begin{cases} \lim\limits_{r\to\infty} e^{\alpha} = 1 \\ \lim\limits_{r\to\infty} e^{\beta} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \kappa = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{\alpha} = e^{-\beta} \quad \text{et} \quad \dot{\alpha} = 0$$

Pour trouver l'expression de la constante A remarquons qu'à la limite des champs de gravitation faibles, nous devons retrouver la relation (230) p. 337 :

$$\begin{aligned} g_{00} &\approx 1 + \frac{2\phi}{c^2} \\ \frac{A}{r} + 1 &\approx 1 + \frac{2\phi}{c^2} \\ A &\approx r\,\frac{2\phi}{c^2} \end{aligned}$$

Le modèle du potentiel du champ gravitationnel ϕ est donné par la relation (152) p. 250, M étant la masse qui crée le champ. On pose

$$\begin{aligned} r_s &= -A \\ &= \frac{2\mathrm{G}M}{c^2} \end{aligned} \tag{240}$$

le *rayon de Schwarzschild* de la masse M qui crée le champ de gravitation, de dimension une longueur.

Remarque 61. *Deux corps de masse m et M peuvent se libérer de leur attraction gravitationnelle mutuelle si leur vitesse radiale relative en éloignement est suffisamment élevée. Dans le cadre de la mécanique non relativiste, supposons $m \ll M$ et supposons la conservation de l'énergie mécanique de m :*

$$\begin{aligned} E_i &= E_f \\ E_{ci} + E_{pi} &= E_{cf} + E_{pf} \end{aligned}$$

À mesure que m s'éloigne de M, son énergie cinétique se transforme en énergie potentielle jusqu'à ce que sa vitesse soit nulle à l'infini. Prenons l'origine de l'énergie potentielle à l'infini :

$$\begin{aligned} E_{ci} + E_{pi} &= 0 \\ \frac{mv_l^2}{2} - \frac{\mathrm{G}Mm}{r} &= 0 \\ v_l &= \sqrt{\frac{2\mathrm{G}M}{r}} \end{aligned}$$

Calculons le rayon maximum, appelé rayon de Schwarzschild, que doit faire le corps de masse M pour que sa vitesse de libération associée soit égale ou supérieure à la vitesse limite c :

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{2\mathrm{G}M}{r_s}} \\ r_s &= \frac{2\mathrm{G}M}{c^2} \end{aligned}$$

Le rayon de Schwarzschild est aussi appelé rayon du trou noir.

Par conséquent

$$e^\alpha = 1 - r_s/r \qquad \text{et} \qquad e^\beta = (1 - r_s/r)^{-1}$$

La métrique de Schwarzschild s'écrit :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2\right)$$

Le temps coordonnée t est mesuré loin de toute masse-énergie, donc loin de M, autrement dit pour $r \gg r_s$. Comme les distances radiales varient fortement dans le champ de gravitation, la coordonnée radiale r n'est pas la distance physique au centre de la masse M, mais correspond à la circonférence divisée par 2π d'une sphère de centre M, sur laquelle le champ de gravitation est homogène. La métrique de Schwarzschild n'est pas définie en $r = 0$, point de l'espace-temps appelé *singularité gravitationnelle*. En revanche l'hypersurface $r = r_s$ n'est pas une singularité gravitationnelle, c'est une *singularité de coordonnées* car un changement de coordonnées approprié permet de définir la métrique de Schwarzschild en r_s. Cette hypersurface qui ne peut être traversée que dans un sens est appelée *horizon des évènements*.

Pour $r \gg r_s$ on vérifie que la métrique de Schwarzschild est asymptotique à la métrique de Lorentz de la relativité restreinte en coordonnées sphériques :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2\right)$$

Les symboles de Christoffel de deuxième espèce s'écrivent :

$$\left\{ {\Gamma^0}_{01} = \tfrac{1}{2}\,\alpha' \right. \qquad \begin{cases} {\Gamma^1}_{11} = \tfrac{1}{2}\,\beta' \\ {\Gamma^1}_{00} = \tfrac{1}{2}\,\alpha' e^{\alpha-\beta} \\ {\Gamma^1}_{22} = -re^{-\beta} \\ {\Gamma^1}_{33} = -r\sin^2(\theta)e^{-\beta} \end{cases} \qquad \begin{cases} {\Gamma^2}_{21} = 1/r \\ {\Gamma^2}_{33} = -\sin(\theta)\cos(\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} {\Gamma^3}_{31} = 1/r \\ {\Gamma^3}_{32} = \cot(\theta) \end{cases}$$

26.11.2 Équation de la trajectoire d'un corps de faible masse

Le corps d'épreuve suit une géodésique de l'espace-temps courbé par une masse supposée beaucoup plus grande que la sienne, d'équation (236) p. 347 :

$$\forall\lambda = 0, 1, 2, 3 \qquad \frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + {\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

Notons par un point la dérivation par rapport à l'abscisse curviligne s.

(1) $\lambda = 0$ donne l'équation paramétrique de la coordonnée temporelle $x^0 = ct$:

$$\ddot{x}^0 + {\Gamma^0}_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$$
$$\ddot{x}^0 + {\Gamma^0}_{00}\,\dot{x}^0\dot{x}^0 + {\Gamma^0}_{01}\,\dot{x}^0\dot{x}^1 + {\Gamma^0}_{11}\,\dot{x}^1\dot{x}^1 = 0$$
$$\ddot{x}^0 + \tfrac{1}{2}\,\eta'\,\dot{x}^0\dot{x}^1 = 0$$

Or nous avons trouvé au paragraphe 26.11.1 précédent pour un corps à symétrie sphérique :

$$\begin{cases} e^\alpha = (1 - r_s/r)^{-1} \\ e^\beta = 1 - r_s/r \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} (e^\alpha)' = (1 - r_s/r)^{-2}(-r_s/r^2) \\ \left(e^\beta\right)' = r_s/r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha' e^\alpha = (1 - r_s/r)^{-2}(-r_s/r^2) \\ \beta' e^\beta = r_s/r^2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \alpha' = (-r_s/r^2)(1 - r_s/r)^{-1} \\ \beta' = r_s/r^2(1 - r_s/r)^{-1} \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{c^2 d^2 t}{ds^2} + \frac{r_s}{2r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}\frac{cdt}{ds}\frac{dr}{ds} &= 0\\
\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}\frac{d}{ds}\left[\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\frac{cdt}{ds}\right] &= 0\\
\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\frac{cdt}{ds} &= \alpha
\end{aligned}
\tag{241}
$$

où α est constante sur la trajectoire.

(2) $\lambda = 1$ donne l'équation paramétrique de la coordonnée radiale r :

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}^1 + \Gamma^1{}_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu &= 0\\
\ddot{x}^1 + \Gamma^1{}_{00}\,\dot{x}^0\dot{x}^0 + \Gamma^1{}_{11}\,\dot{x}^1\dot{x}^1 + \Gamma^1{}_{22}\,\dot{x}^2\dot{x}^2 + \Gamma^1{}_{33}\,\dot{x}^3\dot{x}^3 &= 0\\
\ddot{x}^1 + \tfrac{1}{2}\,\alpha' e^{\alpha-\beta}\dot{x}^0\dot{x}^0 + \tfrac{1}{2}\,\beta'\dot{x}^1\dot{x}^1 - re^{-\beta}\dot{x}^2\dot{x}^2 - r\sin^2(\theta)e^{-\beta}\dot{x}^3\dot{x}^3 &= 0\\
\frac{d^2r}{ds^2} + \left(1-\frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{cdt}{ds}\right)^2 - \frac{r_s}{2r^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 &\\
-r\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - r\sin^2(\theta)\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 &= 0
\end{aligned}
$$

(3) $\lambda = 2$ donne l'équation paramétrique de la coordonnée angulaire θ :

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}^2 + \Gamma^2{}_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu &= 0\\
\ddot{x}^2 + 2\Gamma^2{}_{12}\,\dot{x}^1\dot{x}^2 + \Gamma^2{}_{33}\,\dot{x}^3\dot{x}^3 &= 0\\
\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} - \sin(\theta)\cos(\theta)\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 &= 0
\end{aligned}
\tag{242}
$$

(4) $\lambda = 3$ donne l'équation paramétrique de la coordonnée angulaire ϕ :

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}^3 + \Gamma^3{}_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu &= 0\\
\ddot{x}^3 + 2\Gamma^3{}_{13}\,\dot{x}^1\dot{x}^3 + \Gamma^3{}_{23}\,\dot{x}^2\dot{x}^3 &= 0\\
\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds} + 2\cot(\theta)\frac{d\theta}{ds}\frac{d\phi}{ds} &= 0
\end{aligned}
\tag{243}
$$

Prenons pour condition initiale $\theta = \pi/2$, le point de départ est dans le plan xoy (voir la figure 7.4 p. 64). Prenons une vitesse initiale contenue dans le plan xoy, donc telle que $d\theta/ds = 0$. La relation (242) p. 361 donne comme équation paramétrique pour θ :

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\theta}{ds^2} &= 0\\
\theta &= C_1 s + C_2\\
\frac{d\theta}{ds} &= C_1
\end{aligned}
$$

Or nous avons pris comme condition initiale $d\theta/ds = 0$, donc $C_1 = 0$ et $\theta = C_2 = \pi/2$. Le mouvement reste dans le plan xoy. La relation (243) p. 361 donne :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds} &= 0 \\ \frac{1}{r^2}\frac{d}{ds}\left(r^2\frac{d\phi}{ds}\right) &= 0 \\ r^2\frac{d\phi}{ds} &= \beta \end{aligned} \tag{244}$$

où β est une constante, qui est la constante de aires au facteur c près :

$$\begin{aligned} \beta &= r^2\frac{d\phi}{cd\tau} \\ c\beta &= r^2\dot{\phi} \end{aligned}$$

τ est le temps propre du corps de faible masse. Avec les conditions initiales, la métrique de Schwarzschild s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 - r_s/r)\, c^2dt^2 - (1 - r_s/r)^{-1}dr^2 - r^2d\phi^2 \\ 1 &= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{cdt}{ds}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 \end{aligned}$$

Éliminons dt et ds à l'aide des relations (241) p. 361 et (244) p. 362 :

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}\alpha^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{\beta^2}{r^2} \\ 1 - \frac{r_s}{r} &= \alpha^2 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{\beta^2}{r^2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \\ \frac{1}{\beta^2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) &= \frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \end{aligned}$$

Le changement de variable,

$$u = 1/r \tag{245}$$

implique

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\phi} &= \frac{d(u^{-1})}{d\phi} \\ &= -u^{-2}\frac{du}{d\phi} \\ \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 &= u^{-4}\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 \\ \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 &= \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 \end{aligned}$$

Remplaçons le rayon de Schwarzschild par son expression, (240) p. 359 :

$$\frac{1}{\beta^2}\left(1 - \frac{2uGM}{c^2}\right) = \frac{\alpha^2}{\beta^2} - \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - u^2\left(1 - \frac{2uGM}{c^2}\right)$$

Dérivons par rapport à ϕ :

$$
\begin{aligned}
-\frac{2\mathrm{G}M}{c^2\beta^2}\,\frac{du}{d\phi} &= -2\,\frac{du}{d\phi}\,\frac{d^2u}{d\phi^2} - 2u\,\frac{du}{d\phi}\left(1-\frac{2u\mathrm{G}M}{c^2}\right) + u^2\,\frac{2\mathrm{G}M}{c^2}\,\frac{du}{d\phi} \\
-\frac{\mathrm{G}M}{c^2\beta^2} &= -\frac{d^2u}{d\phi^2} - u\left(1-\frac{2u\mathrm{G}M}{c^2}\right) + u^2\,\frac{\mathrm{G}M}{c^2} \\
\frac{d^2u}{d\phi^2} + u &= \frac{\mathrm{G}M}{c^2\beta^2} + \frac{3\mathrm{G}Mu^2}{c^2} \qquad (246)
\end{aligned}
$$

En posant

$$p = c^2\beta^2/(\mathrm{G}M) \qquad (247)$$

nous obtenons l'équation différentielle de la trajectoire :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{1}{p} + \frac{3\mathrm{G}M}{c^2}\,u^2 \qquad (248)$$

En mécanique non relativiste, le problème de Kepler conduit à l'équation différentielle d'une ellipse

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{1}{p}$$

où $p = r^4\dot{\theta}^2/(\mathrm{G}M)$ est le *paramètre* de l'ellipse et M est la masse du corps qui crée le champ.

Remarque 62. *L'équation d'une ellipse en coordonnées polaire (r, ϕ) de centre l'un des foyers s'écrit :*

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\phi-\phi_0)}$$

où p est le paramètre et e est l'excentricité. Pour un cercle $e = 0$ et pour une ellipse $0 < e < 1$. En posant $u = 1/r$ l'équation s'écrit

$$u = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos(\phi-\phi_0)$$

Cette équation est solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\theta} = -\dfrac{e}{p}\sin(\phi-\phi_0) \\ \dfrac{d^2u}{d\theta^2} = -\dfrac{e}{p}\cos(\phi-\phi_0) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{1}{p}$$

En relativité générale il s'introduit le terme correctif $3\mathrm{G}M_\odot u^2/c^2$. L'équation de la trajectoire n'admet pas de solution périodique dans l'espace, lorsque ϕ varie de 2π l'inverse du rayon vecteur u ne reprend pas les mêmes valeurs. En conséquence, la trajectoire ne se referme pas après un tour. Nous savons aussi par les observations de Mercure que la solution n'est pas périodique car sa trajectoire elliptique n'est pas fermée.

26.11.3 Avance du périhélie de Mercure

Remarque 63. *Toutes les planètes du système solaire ont une avance de leur périhélie, point de leur trajectoire le plus proche du Soleil. L'avance du périhélie de Mercure est plus importante, sa proximité avec le Soleil la place dans un champ de gravitation plus intense dans lequel les effets relativistes sont plus marqués. Plus généralement, tous les astres et satellites en orbite ont une avance de leur périastre.*

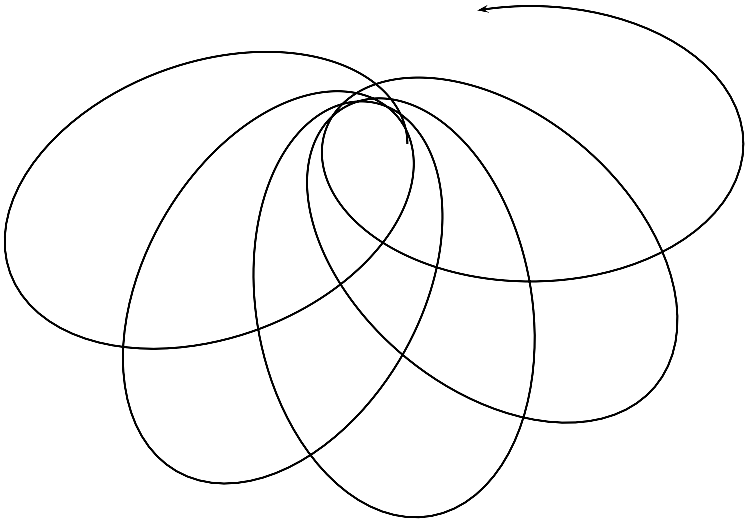


FIG. 26.2 – Avance du périhélie

On vérifie que le terme quadratique correctif est petit devant u en faisant leur rapport :

$$\frac{3\mathrm{G}M_\odot u^2}{c^2 u} = \frac{3\mathrm{G}M_\odot}{rc^2}$$

Prenons les valeurs numériques :

Masse du Soleil : $M_\odot = 1{,}998\ 5 \times 10^{30}$ kg
Constante gravitationnelle : $\mathrm{G} = 6{,}674\ 30 \times 10^{-11}$ m^3/kg/s^2
Vitesse limite : $c = 299\ 792\ 458$ m/s
Demi-grand axe : $a_☿ = 57\ 909\ 083 \times 10^3$ m
Distance minimale : $r_{min☿} = 46\ 001\ 200 \times 10^3$ m
Distance maximale : $r_{max☿} = 69\ 816\ 900 \times 10^3$ m
Excentricité : $e_☿ = 0{,}205\ 63$
Période de révolution : $T_☿ = 7\ 442\ 203$ s

$$\frac{3\mathrm{G}M_\odot}{rc^2} = \frac{3 \times 6{,}674\ 30 \times 10^{-11} \times 1{,}998\ 5 \times 10^{30}}{57\ 909\ 050 \times 10^3 \times 299\ 792\ 458^2}$$
$$= 7{,}65 \times 10^{-8}$$

En première approximation l'équation différentielle du mouvement s'écrit sans le terme quadratique et donne pour équation du mouvement l'ellipse de la mécanique non relativiste. Cette solution est injectée dans l'équation différentielle du mouvement pour remplacer le terme quadratique, elle devient alors :

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\phi^2} + u &= \frac{1}{p} + \frac{3\mathrm{G}M_\odot}{p^2c^2}\left[1 + e\cos(\phi - \phi_0)\right]\\ &= \frac{1}{p} + \frac{3\mathrm{G}M_\odot}{p^2c^2}\left[1 + 2e\cos(\phi - \phi_0) + e^2\cos^2(\phi - \phi_0)\right]\\ &= \frac{1}{p} + \frac{3\mathrm{G}M_\odot}{p^2c^2} + \frac{6\mathrm{G}M_\odot}{p^2c^2}\, e\cos(\phi - \phi_0)\end{aligned}$$

où e^2 est d'autant plus petit devant e que l'orbite est proche d'un cercle. On compare les deux premiers termes en faisant leur rapport :

$$\begin{aligned}\frac{3\mathrm{G}M_\odot}{pc^2} &\approx \frac{3\mathrm{G}M_\odot}{rc^2} \\ &\approx 7{,}65 \times 10^{-8}\end{aligned}$$

Le deuxième terme est donc négligeable devant le premier :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{1}{p} + \frac{6\mathrm{G}M_\odot}{p^2c^2}\, e\cos(\phi - \phi_0)$$

On pose $w = u - 1/p$:

$$\frac{d^2w}{d\phi^2} + w \approx \frac{6\mathrm{G}M_\odot}{pc^2}\, w$$

En posant la constante

$$\alpha = 1 - \frac{6\mathrm{G}M_\odot}{pc^2}$$

nous avons l'équation différentielle

$$\frac{d^2w}{d\phi^2} + \alpha^2 w \approx 0$$

qui a pour solution :

$$\begin{aligned} w &= \beta\cos[\alpha(\phi - \phi_0)] \\ u &= \frac{1}{p} + \beta\cos[\alpha(\phi - \phi_0)]\end{aligned}$$

On identifie β avec e/p pour retrouver le cas non relativiste, et l'on a

$$r = \frac{p}{1 + e\cos[\alpha(\phi - \phi_0)]}$$

Le rayon vecteur reprend sa valeur lorsque

$$\begin{aligned}\alpha\phi &= 2\pi \\ \phi &= 2\pi/\alpha\end{aligned}$$

autrement dit, puisque $\alpha < 1$, après un tour complet. Le périhélie avance. La différence d'angle avec un tour complet ($\phi = 2\pi$) vaut

$$\begin{aligned}\delta &= 2\pi/\alpha - 2\pi \\ &= 2\pi\left[\left(1 - \frac{6\mathrm{G}M_\odot}{pc^2}\right)^{-1/2} - 1\right] \\ &\approx \frac{6\pi\mathrm{G}M_\odot}{pc^2}\end{aligned}$$

Pour faire intervenir des grandeurs directement mesurables, on utilise la relation classique suivante, qui lie le paramètre de l'ellipse, son demi grand axe a et son excentricité e,

$$p = a\left(1 - e^2\right)$$

et la troisième loi de Kepler

$$\frac{4\pi^2a^3}{T^2} = \mathrm{G}M_\odot$$

où T est la période de révolution et m la masse qui crée le champ de gravitation. Avec ces relations, l'avance du périhélie de Mercure devient

$$\begin{aligned}\delta_{☿} &= \frac{6\pi \times 4\pi^2 a_{☿}^3}{a_{☿}\left(1-e_{☿}^2\right) T_{☿}^2 c^2} \\ &= \frac{24\pi^3 a_{☿}^2}{\left(1-e_{☿}^2\right) T_{☿}^2 c^2} \\ &= \frac{24 \times 3{,}141\ 592^3 \times \left(57\ 909\ 083 \times 10^3\right)^2}{(1-0{,}205\ 63^2)\, 7\ 442\ 203^2 \times 299\ 792\ 458^2} \\ &= 5{,}234 \times 10^{-7} \text{ rad}\end{aligned}$$

En secondes d'arc ($1° = 3\ 600\ ''$) pour un siècle :

$$\begin{aligned}\delta_{☿} &= \frac{5{,}234 \times 10^{-7} \times 180 \times 3600 \times 100 \times 365.2422}{\pi \times 87.9693} \\ &= 44{,}8\ '' \text{ par siècle}\end{aligned}$$

26.12 Déviation des rayons lumineux

Cherchons la trajectoire d'un rayon lumineux lorsqu'il passe au voisinage immédiat du Soleil. On suppose que la masse du photon est nulle et que ce dernier ce propage à la vitesse limite c. Reprenons l'équation du mouvement (246) p. 363 :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mathrm{G}M_\odot}{c^2\beta^2} + \frac{3\mathrm{G}M_\odot u^2}{c^2}$$

La relation (244) p. 362 donne :

$$\frac{\mathrm{G}M_\odot}{c^2\beta^2} = \frac{\mathrm{G}M_\odot}{c^2 r^4}\left(\frac{ds}{d\phi}\right)^2$$

Or, pour tout ce qui se propage à la vitesse limite $s = 0$ donc $ds/d\phi = 0$. L'équation devient :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3\mathrm{G}M_\odot u^2}{c^2}$$

Avec (245) p. 362 $r = 1/u$:

$$r^2 \gg r \qquad \Leftrightarrow \qquad u^2 \ll u$$

Si l'on suppose le terme correctif négligeable devant u, l'équation approchée s'écrit

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mathrm{G}M_\odot}{c^2\beta^2}$$

On résoud l'équation sans second membre :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0$$

On cherche une solution de la forme $u_0 = a + b\cos(\phi)$:

$$\begin{aligned}
\frac{du_0}{d\phi} &= -b\sin(\phi) \\
\frac{d^2u_0}{d\phi^2} &= -b\cos(\phi) \\
\frac{d^2u_0}{d\phi^2} + u &= a
\end{aligned}$$

Donc $a = 0$ et

$$\begin{aligned}
b\cos(\phi) &= 1/r_0 \\
b\cos(\pi/2) &= 1/r_{min} \\
b &= 1/r_{min}
\end{aligned}$$

si bien que

$$u_0 = \cos(\phi)/r_{min}$$

Revenons à l'équation complète en cherchant une solution de la forme $u_0 + u_1$ avec $u_1 \ll u_0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2(u_0+u_1)}{d\phi^2} + u_0 + u_1 &= \frac{3\mathrm{G}M_\odot(u_0+u_1)^2}{c^2} \\
\frac{d^2u_0}{d\phi^2} + \frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_0 + u_1 &= \frac{3\mathrm{G}M_\odot\,(u_0^2 + 2u_0u_1 + u_1^2)}{c^2} \\
\frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 &= \frac{3\mathrm{G}M_\odot u_0^2}{c^2} \\
&= \frac{3\mathrm{G}M_\odot\cos^2(\phi)}{c^2r_{min}^2}
\end{aligned}$$

On cherche une solution de la forme $a + b\cos^2(\phi)$:

$$\begin{aligned}
\frac{du_1}{d\phi} &= -2b\cos(\phi)\sin(\phi) \\
\frac{d^2u_1}{d\phi^2} &= -2b\left[-\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)\right] \\
&= -2b\left[2\cos^2(\phi) - 1\right] \\
\frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 &= -4b\cos^2(\phi) + 2b + a + b\cos^2(\phi) \\
&= 2b + a - 3b\cos^2(\phi) \\
&= -3b\cos^2(\phi)
\end{aligned}$$

où l'on a posé $a = -2b$.

$$\begin{aligned}
b &= -\frac{\mathrm{G}M_\odot}{c^2r_{min}^2} \\
u_1 &= \frac{\mathrm{G}M_\odot}{c^2r_{min}^2}\left[2 - \cos^2(\phi)\right] \\
&= \frac{\mathrm{G}M_\odot}{c^2r_{min}^2}\left[1 + \sin^2(\phi)\right]
\end{aligned}$$

D'où la solution :

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 \\ &= \frac{\cos(\phi)}{r_{min}} + \frac{\mathrm{G}M_\odot}{c^2 r_{min}^2}\left[1 + \sin^2(\phi)\right] \end{aligned}$$

Pour calculer la déviation subie par le rayon lumineux, on considère les deux asymptotes aux deux branches infinies de la trajectoire hyperbolique du rayon. À l'infini le rayonnement « suit » la première asymptote, après avoir été dévié, à l'infini il « suit » la seconde asymptote. L'angle δ de déviation est l'angle entre les deux asymptotes. Par symétrie du problème, nous n'avons besoin que de l'angle ϕ_{asy} que fait l'une des asymptotes avec l'axe focale de l'hyperbole :

$$\phi_{asy} = \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}$$

u tend vers zéro lorsque r tend vers l'infini :

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\phi_{asy})}{r_{min}} + \frac{\mathrm{G}M_\odot}{c^2 r_{min}^2}\left[1 + \sin^2(\phi_{asy})\right] &= 0 \\ \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\delta_\odot}{2}\right)}{r_{min}} + \frac{\mathrm{G}M_\odot}{c^2 r_{min}^2}\left[1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\delta_\odot}{2}\right)\right] &= 0 \\ \frac{-\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}{r_{min}} + \frac{\mathrm{G}M_\odot}{c^2 r_{min}^2}\left[1 + \cos^2\left(\frac{\delta_\odot}{2}\right)\right] &= 0 \end{aligned}$$

L'angle $\delta_\odot$ étant petit, on effectue un développement limité à l'ordre un des fonctions sinus et cosinus au voisinage de zéro, $\sin(x) \approx x$ et $\cos(x) \approx 1$:

$$\begin{aligned} -\frac{\delta_\odot}{2r_{min}} + \frac{2\mathrm{G}M_\odot}{c^2 r_{min}^2} &= 0 \\ \delta_\odot &\approx \frac{4\mathrm{G}M_\odot}{c^2 r_{min}} \end{aligned}$$

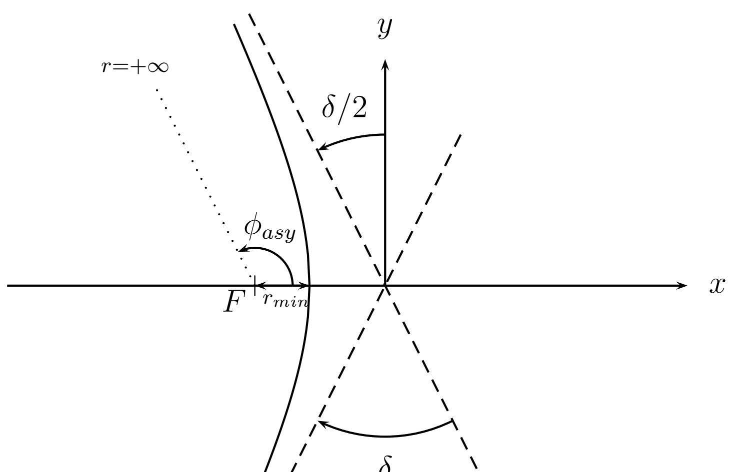


FIG. 26.3 – Trajectoire hyperbolique du rayon lumineux

En prenant pour r_{min} le rayon du Soleil $r_{\odot} = 696\ 342 \times 10^3$ m :

$$\begin{aligned}\delta_{\odot} &\approx \frac{4 \times 6{,}674\ 30 \times 10^{-11} \times 1{,}988\ 5 \times 10^{30}}{299\ 792\ 458^2 \times 696\ 342 \times 10^3} \\ &\approx 8{,}48 \times 10^{-6} \text{ rad} \\ &\approx 1{,}75\ ''\end{aligned}$$

27 Annexes

27.1 Diagrammes d'espace-temps

27.1.1 Mécanique classique

En mécanique classique, à un changement de référentiel galiléen correspond un changement d'origine du système de coordonnées spatiales. La coordonnée temporelle étant la même dans tous les référentiels, on ne la représente pas mais on représente deux des trois coordonnées spatiales à un instant donné. On prend pour instant initial t_0 le moment où les référentiels se croisent (Fig. 27.1) :

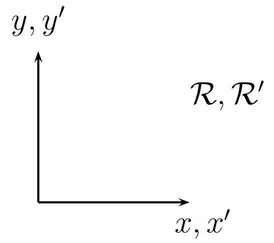


Fig. 27.1 – Référentiels confondus à t_0

Habituellement on trouve la représentation suivante des référentiels à l'instant t_1 (Fig. 27.2),

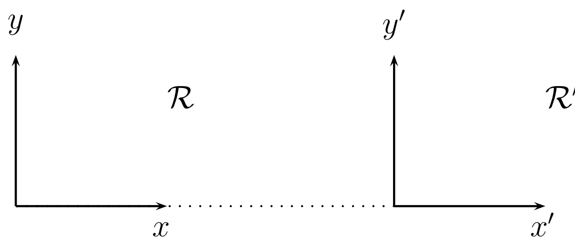


Fig. 27.2 – Référentiels à t_1

où les référentiels ont une vitesse constante d'éloignement v selon l'axe x, et où la trajectoire relative est en pointillés. La représentation du vecteur $\boldsymbol{v}$ attaché à $\mathcal{R}$ ou à $\mathcal{R}'$ implique que l'on se situe dans l'autre référentiel (Fig. 27.3) :

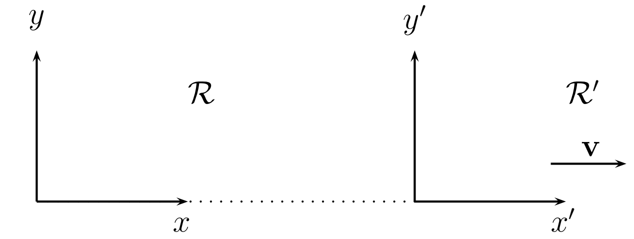


FIG. 27.3 – Nous sommes dans $\mathcal{R}$

Nous sommes dans $\mathcal{R}$ et nous observons le référentiel $\mathcal{R}'$ s'éloigner de nous avec la vitesse $\mathbf{v}$. Pour faire le lien avec la représentation de Poincaré-Minkowsk de l'espace-temps de la relativité restreinte, voici une représentation avec la coordonnée temporelle et une coordonnée spatiale. À l'instant t_0 où les référentiels se croisent (Fig. 27.4) :

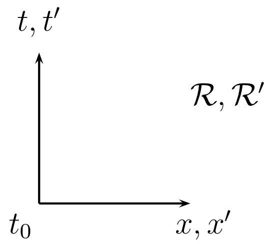


FIG. 27.4 – Référentiels confondus à t_0

À l'instant t_1 nous avons la représentation suivante, dans laquelle les observateurs se trouvent au croisement des axes temporel et spatial (Fig. 27.5) :

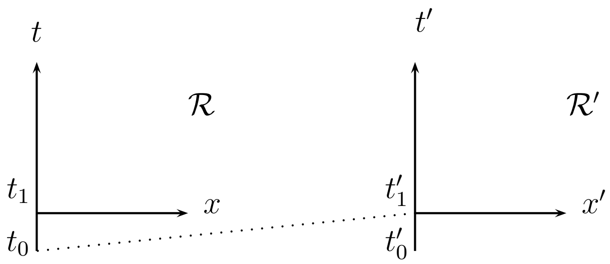


FIG. 27.5 – Référentiels à $t_1 = t'_1$

Ici, la représentation de la trajectoire indique que l'on se situe dans $\mathcal{R}$.

27.1.2 Relativité restreinte

En relativité restreinte, à un changement de référentiel dans l'espace-temps correspond un changement d'origine du système de coordonnées spatiales, mais aussi un changement de la coordonnée temporelle et de la coordonnée spatiale dans l'axe du mouvement. Le temps et l'espace se « mélangent » lorsqu'on observe un référentiel autre que le sien propre. Dans la représentation de Minkowski-Poincaré on ne s'intéresse plus au déplacement dans l'espace comme en mécanique classique, on représente les coordonnées (t, x) des référentiels à l'instant t_0 où ils se croisent (Fig. 27.6) :

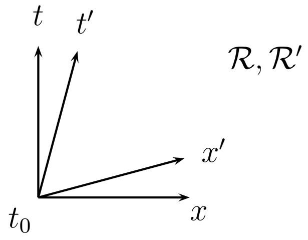


FIG. 27.6 – Référentiels à t_0 vus de $\mathcal{R}$

Nous sommes dans $\mathcal{R}$ et nous observons le référentiel $\mathcal{R}'$ dont les axes de coordonnées spatio-temporelles sont obliques. En représentant les coordonnées (t, x) à l'instant t_1 on a la figure 27.7,

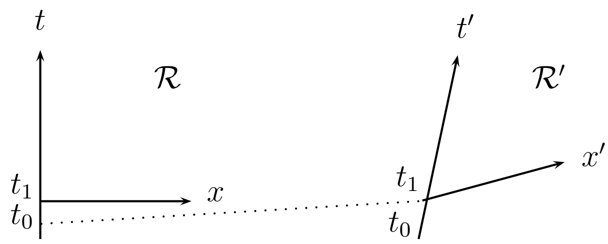


FIG. 27.7 – Référentiels à t_1 vus de $\mathcal{R}$

qui fait le lien avec la figure 27.5 de la mécanique classique.

27.2 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

DÉMONSTRATION. Méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Pour tout espace vectoriel pré-euclidien, la méthode d'orthonormalisation de Schmidt permet la construction effective d'une base orthonormée.

Soit $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ une base quelconque d'un espace vectoriel pré-euclidien E_n. Cherchons n vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, orthogonaux entre eux et linéairement indépendants pour former une base orthogonale. Pour le premier de ces vecteurs, nous posons :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$$

Bien entendu, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ forme une base de E_n. Cherchons le deuxième vecteur $\mathbf{v}_2$ sous la forme de la combinaison linéaire suivante, où λ_1 est l'inconnue :

$$\mathbf{v}_2 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2$$

Écrivons la relation d'orthogonalité entre $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= 0 \\ \mathbf{u}_1 \cdot (\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) &= 0 \\ \lambda_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= 0 \\ \lambda_1 &= -\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \end{aligned}$$

λ_1 est non nul car $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont supposés non orthogonaux. Le vecteur $\mathbf{v}_2$ est non nul car le système $(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ étant libre, $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont non nuls et linéairement indépendants. $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_n)$ est donc un système libre. Cherchons le troisième vecteur $\mathbf{v}_3$ sous la forme :

$$\mathbf{v}_3 = \mu_1 \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_3$$

Les coefficients μ_1 et μ_2 se calculent en écrivant d'une part les relations d'orthogonalité entre $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_3$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 &= 0 \\
\mathbf{u}_1 \cdot (\mu_1 \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_3) &= 0 \\
\mathbf{u}_1 \cdot [\mu_1 \mathbf{u}_1 + \mu_2 (\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \mathbf{u}_3] &= 0 \\
\mu_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \mu_2 \lambda_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \mu_2 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 &= 0 \\
\mu_1 \|\mathbf{u}_1\|^2 + \mu_2 \lambda_1 \|\mathbf{u}_1\|^2 - \mu_2 \lambda_1 \|\mathbf{u}_1\|^2 + \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 &= 0 \\
\mu_1 &= -\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_1\|^2}
\end{aligned}$$

et d'autre part les relations d'orthogonalité entre $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 &= 0 \\
(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot (\mu_1 \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_3) &= 0 \\
\lambda_1 \mu_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_1 \mu_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_3 + \mu_1 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 + \mu_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 &= 0 \\
\lambda_1 \mu_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_1 \mu_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_3 + \mu_1 (\mathbf{v}_2 - \lambda_1 \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_1 & \\
+ \mu_2 (\mathbf{v}_2 - \lambda_1 \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_2 - \lambda_1 \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{u}_3 &= 0 \\
\mu_1 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 + \mu_2 \|\mathbf{v}_2\|^2 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_3 &= 0 \\
\mu_2 \|\mathbf{v}_2\|^2 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_3 &= 0 \\
\mu_2 &= -\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_3}{\|\mathbf{v}_2\|^2}
\end{aligned}$$

Nous avons déterminé le vecteur $\mathbf{v}_3$, orthogonal aux vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. Ce vecteur est non nul, car le système $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_n)$ étant libre, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{u}_3$ sont non nuls et linéairement indépendants. Le système $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{u}_n)$ est donc libre. On construit ainsi de proche en proche le système de vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ orthogonaux entre eux, dont aucun n'est nul, et dont l'ensemble forme une base orthogonale de E_n.

En divisant chacun de ces vecteurs par sa norme,

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}$$

l'ensemble des vecteurs $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ forme une base orthonormée de E_n. □

27.3 Bases non holonomiques

Considérons la base polaire normée. Ses vecteurs de base ont pour expression :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{\hat{\rho}} = \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_{\hat{\rho}} = \cos(\theta)\, \mathbf{e}_x + \sin(\theta)\, \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = -\sin(\theta)\, \mathbf{e}_x + \cos(\theta)\, \mathbf{e}_y \end{cases}$$

Existe-t-il un système de coordonnées (ξ, η) tel que $(\mathbf{e}_{\hat{\rho}}, \mathbf{e}_{\hat{\theta}})$ en soit une base naturelle ?

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{\hat{\rho}} = \mathbf{e}_\xi \\ \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = \mathbf{e}_\eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_{\hat{\rho}} = x_{,\xi}\, \mathbf{e}_x + y_{,\xi}\, \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = x_{,\eta}\, \mathbf{e}_x + y_{,\eta}\, \mathbf{e}_y \end{cases}$$

Nous avons alors :

$$x_{,\xi} = \cos(\theta), \qquad y_{,\xi} = \sin(\theta)$$
$$x_{,\eta} = -\sin(\theta), \qquad y_{,\eta} = \cos(\theta)$$

Les dérivées partielles croisées donnent les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \eta}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} = \dfrac{\partial}{\partial \xi}\dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta}\dfrac{\partial y}{\partial \xi} = \dfrac{\partial}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \cos(\theta)}{\partial \eta} = \dfrac{\partial(-\sin(\theta))}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \sin(\theta)}{\partial \eta} = \dfrac{\partial \cos(\theta)}{\partial \xi} \end{cases}$$

Il est plus simple de passer par la base duale normée.

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{\hat{\rho}} = \mathbf{e}^{\rho} \\ \mathbf{e}^{\hat{\theta}} = \rho\, \mathbf{e}^{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}^{\hat{\rho}} = \cos(\theta)\, \mathbf{e}_x + \sin(\theta)\, \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}^{\hat{\theta}} = -\sin(\theta)\, \mathbf{e}_x + \cos(\theta)\, \mathbf{e}_y \end{cases}$$

Existe-t-il un système de coordonnées (ξ, η) tel que $(\mathbf{e}^{\hat{\rho}}, \mathbf{e}^{\hat{\theta}})$ en soit la base duale de la base naturelle ?

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{\hat{\rho}} = \mathbf{e}^{\xi} \\ \mathbf{e}^{\hat{\theta}} = \mathbf{e}^{\eta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}^{\hat{\rho}} = \xi_{,x}\, \mathbf{e}_x + \xi_{,y}\, \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}^{\hat{\theta}} = \eta_{,x}\, \mathbf{e}_x + \eta_{,y}\, \mathbf{e}_y \end{cases}$$

Nous avons alors :

$$\xi_{,x} = \cos(\theta), \qquad \xi_{,y} = \sin(\theta)$$
$$\eta_{,x} = -\sin(\theta), \qquad \eta_{,y} = \cos(\theta)$$

Les dérivées partielles croisées donnent les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \cos(\theta)}{\partial y} = \dfrac{\partial \sin(\theta)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial(-\sin(\theta))}{\partial y} = \dfrac{\partial \cos(\theta)}{\partial x} \end{cases}$$

Réécrivons la dernière relation :

$$\frac{\partial \sin(\theta)}{\partial y} + \frac{\partial \cos(\theta)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) = 0$$

ce qui est impossible. Le système de coordonnées (ξ, η) n'existe donc pas.

27.4 Coordonnées curvilignes orthogonales

27.4.1 Coordonnées paraboliques (u, v)

27.4.1.1 Passage des coordonnées paraboliques aux rectangulaires (Fig. 27.8)

$$\begin{cases} x = (u^2 - v^2)/2 \\ y = uv \end{cases} \quad \text{avec} \quad -\infty < u < +\infty, \quad v \geqslant 0$$

27.4.1.2 Passage des coordonnées polaires aux paraboliques

$$\begin{cases} u = \sqrt{2\rho}\,\cos(\theta/2) \\ v = \sqrt{2\rho}\,\sin(\theta/2) \end{cases}$$

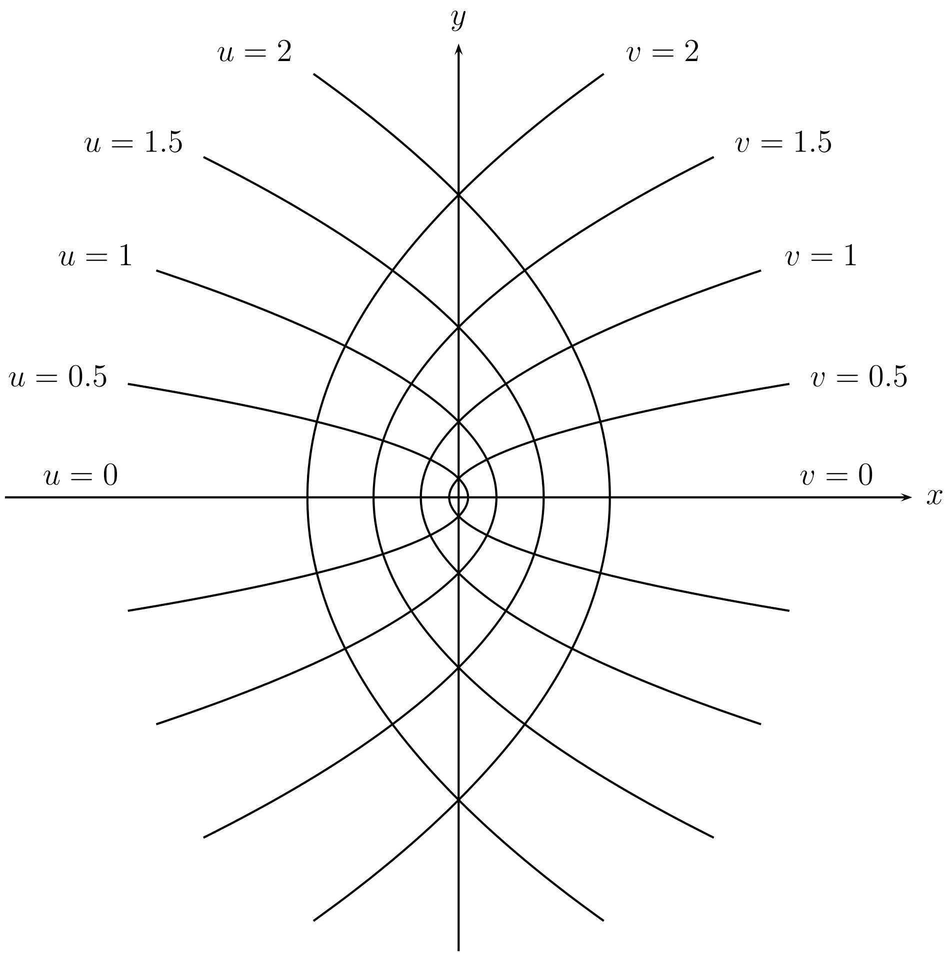


FIG. 27.8 – Coordonnées paraboliques (u, v)

27.4.1.3 Vecteurs de la base naturelle en coordonnées paraboliques

Partant de l'expression du vecteur position :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{OM} &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y \\ &= \frac{u^2 - v^2}{2}\,\mathbf{e}_x + uv\mathbf{e}_y \end{aligned}$$

nous trouvons l'expression des vecteurs de la base naturelle :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_u = \partial_u \boldsymbol{M} \\ \mathbf{e}_v = \partial_v \boldsymbol{M} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{e}_u = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_v = -v\mathbf{e}_x + u\mathbf{e}_y \end{cases}$$

27.4.1.4 Norme des vecteurs de la base naturelle en coordonnées paraboliques

$$\begin{cases} \|\mathbf{e}_u\| = \sqrt{u^2+v^2} \\ \|\mathbf{e}_v\| = \sqrt{v^2+u^2} \end{cases}$$

27.4.2 Coordonnées cylindrico-paraboliques (u, v, z)

27.4.2.1 Passage des coordonnées cylindrico-paraboliques aux rectangulaires

$$\begin{cases} x = (u^2 - v^2)/2 \\ y = uv \\ z = z \end{cases} \quad \text{avec} \quad -\infty < u < +\infty, \quad v \geqslant 0, \quad -\infty < z < +\infty$$

Elles sont identiques aux coordonnées paraboliques, avec en plus $z = z$ et $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$.

27.4.3 Coordonnées paraboloïdales (u, v, ϕ)

27.4.3.1 Passage des coordonnées paraboloïdales aux rectangulaires

$$\begin{cases} x = uv\cos(\phi) \\ y = uv\sin(\phi) \\ z = (u^2 - v^2)/2 \end{cases} \quad \text{avec} \quad u \geqslant 0, \quad v \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \phi < 2\pi$$

On obtient les surfaces de coordonnées paraboloïdales $u = c^{ste}$ et $v = c^{ste}$ en faisant tourner les paraboles de la figure 27.8 p. 376 autour de l'axe x, cet axe devenant l'axe z (axe de symétrie de révolution). Le troisième ensemble de surfaces de coordonnées, $\phi = c^{ste}$, est formé de plans coupant cet axe de révolution.

27.4.3.2 Vecteurs de la base naturelle en coordonnées paraboloïdales

Partant de l'expression du vecteur position :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{OM} &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \\ &= uv\cos(\phi)\,\mathbf{e}_x + uv\sin(\phi)\,\mathbf{e}_y + \frac{u^2 - v^2}{2}\,\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

nous trouvons l'expression des vecteurs de la base naturelle :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_u = \partial_u \boldsymbol{M} \\ \mathbf{e}_v = \partial_v \boldsymbol{M} \\ \mathbf{e}_\phi = \partial_\phi \boldsymbol{M} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{e}_u = v\cos(\phi)\,\mathbf{e}_x + v\sin(\phi)\,\mathbf{e}_y + u\mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_v = u\cos(\phi)\,\mathbf{e}_x + u\sin(\phi)\,\mathbf{e}_y - v\mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\phi = -uv\sin(\phi)\,\mathbf{e}_x + uv\cos(\phi)\,\mathbf{e}_y \end{cases}$$

27.4.3.3 Norme des vecteurs de la base naturelle en coordonnées paraboloïdales

$$\begin{cases} \|\mathbf{e}_u\| = \sqrt{v^2\cos^2\phi + v^2\sin^2\phi + u^2} \\ \|\mathbf{e}_v\| = \sqrt{u^2\cos^2\phi + u^2\sin^2\phi + v^2} \\ \|\mathbf{e}_\phi\| = \sqrt{u^2v^2\sin^2\phi + u^2v^2\cos^2\phi} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \|\mathbf{e}_u\| = \sqrt{v^2+u^2} \\ \|\mathbf{e}_v\| = \sqrt{u^2+v^2} \\ \|\mathbf{e}_\phi\| = uv \end{cases}$$

27.4.4 Coordonnées elliptiques (u, v)

27.4.4.1 Passage des coordonnées elliptiques aux rectangulaires (Fig. 27.9)

$$\begin{cases} x = a\cosh u \cos v \\ y = a \sinh u \sin v \end{cases} \quad \text{avec} \quad u \geqslant 0, \quad 0 \leqslant v < 2\pi$$

En élevant au carré, nous avons :

$$\begin{cases} u^2 = a^2\cosh^2 u \cos^2 v \\ v^2 = a^2 \sinh^2 u \sin^2 v \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{u^2}{a^2\cosh^2 u} = \cos^2 v \\ \dfrac{v^2}{a^2\sinh^2 u} = \sin^2 v \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{a^2\cosh^2 u} + \frac{v^2}{a^2\sinh^2 u} &= \cos^2 v + \sin^2 v \\ &= 1 \end{aligned}$$

qui est l'équation d'une ellipse lorsque le paramètre u est constant, et :

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{a^2\cos^2 v} - \frac{v^2}{a^2\sin^2 v} &= \cosh^2 u - \sinh^2 u \\ &= 1 \end{aligned}$$

qui est l'équation d'une hyperbole lorsque le paramètre v est constant.

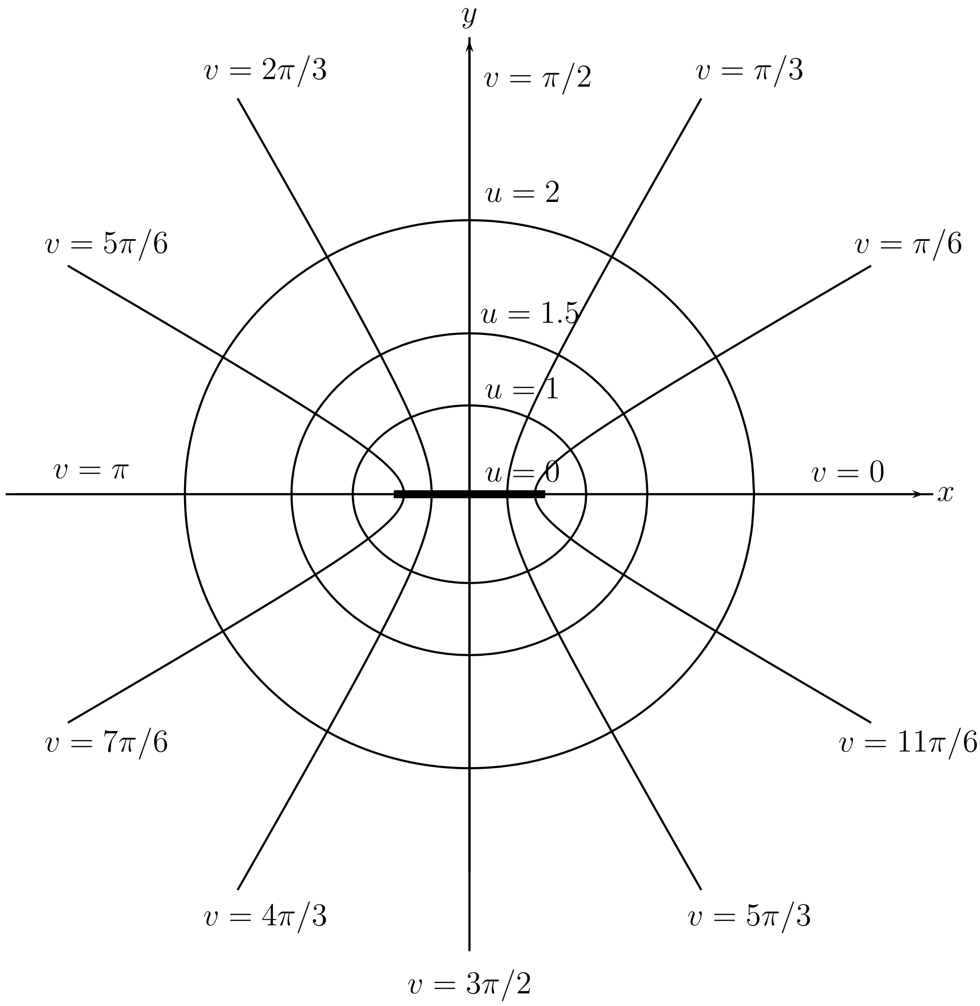


FIG. 27.9 – Coordonnées elliptiques

27.4.4.2 Vecteurs de la base naturelle en coordonnées elliptiques

Partant de l'expression du vecteur position :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{OM} &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y \\ &= a\cosh u \cos v \mathbf{e}_x + a \sinh u \sin v \mathbf{e}_y\end{aligned}$$

nous trouvons l'expression des vecteurs de la base naturelle :

$$\begin{cases}\mathbf{e}_u = \partial_u \boldsymbol{M} \\ \mathbf{e}_v = \partial_v \boldsymbol{M}\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases}\mathbf{e}_u = a\sinh u \cos v \mathbf{e}_x + a\cosh u \sin v \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_v = -a\cosh u \sin v \mathbf{e}_x + a \sinh u \cos v \mathbf{e}_y\end{cases}$$

27.4.4.3 Norme des vecteurs de la base naturelle en coordonnées elliptiques

$$\begin{cases}\|\mathbf{e}_u\| = \sqrt{a^2\sinh^2 u\cos^2 v + a^2\cosh^2 u \sin^2 v} \\ \|\mathbf{e}_v\| = \sqrt{a^2\cosh^2 u\sin^2 v + a^2\sinh^2 u \cos^2 v}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \|\mathbf{e}_u\| = a\sqrt{\sinh^2 u \cos^2 v + (1+\sinh^2 u)\sin^2 v} \\ \|\mathbf{e}_v\| = a\sqrt{(1+\sinh^2 u)\sin^2 v + \sinh^2 u \cos^2 v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{e}_u\| = a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \\ \|\mathbf{e}_v\| = a\sqrt{\sin^2 v + \sinh^2 u} \end{cases}$$

27.4.5 Coordonnées cylindrico-elliptiques (u, v, z)

27.4.5.1 Passage des coordonnées cylindrico-elliptiques aux rectangulaires

$$\begin{cases} x = a\cosh u \cos v \\ y = a \sinh u \sin v \\ z = z \end{cases} \quad \text{avec} \quad u \geqslant 0, \quad 0 \leqslant v < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

Elles sont identiques aux coordonnées elliptiques, avec en plus $z = z$ et $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$.

27.4.6 Coordonnées de trace elliptique allongée (ξ, η, ϕ)

27.4.6.1 Passage des coordonnées de trace elliptique allongée aux rectangulaires

$$\begin{cases} x = a\sinh\xi \sin\eta \cos(\phi) \\ y = a \sinh\xi \sin\eta \sin(\phi) \\ z = a\cosh\xi \cos\eta \end{cases} \quad \text{avec} \quad \xi \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \phi < 2\pi$$

On obtient les surfaces de coordonnées elliptiques de trace allongée, $\xi = c^{ste}$ et $\eta = c^{ste}$, en faisant tourner les courbes de la figure 27.9 p. 379 autour de l'axe x, cet axe devenant l'axe z (axe de symétrie de révolution). Le troisième ensemble de surfaces de coordonnées, $\phi = c^{ste}$, est formé de plans coupant cet axe de révolution.

27.4.6.2 Vecteurs de la base naturelle en coordonnées de trace elliptique allongée

Partant de l'expression du vecteur position :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{OM} &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \\ &= a\sinh\xi\sin\eta\cos(\phi)\,\mathbf{e}_x + a\sinh\xi\sin\eta\sin(\phi)\,\mathbf{e}_y + a\cosh\xi\cos\eta\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

nous trouvons l'expression des vecteurs de la base naturelle :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\xi = \partial_\xi M \\ \mathbf{e}_\eta = \partial_\eta M \\ \mathbf{e}_\phi = \partial_\phi \boldsymbol{M} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_\xi = a\cosh\xi\sin\eta\cos(\phi)\,\mathbf{e}_x + a\cosh\xi\sin\eta\sin(\phi)\,\mathbf{e}_y + a\sinh\xi\cos\eta\mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\eta = a\sinh\xi\cos\eta\cos(\phi)\,\mathbf{e}_x + a\sinh\xi\cos\eta\sin(\phi)\,\mathbf{e}_y - a\cosh\xi\sin\eta\mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\phi = -a\sinh\xi\sin\eta\sin(\phi)\,\mathbf{e}_x + a\sinh\xi\sin\eta\cos(\phi)\,\mathbf{e}_y \end{cases}$$

27.4.6.3 Norme des vecteurs de la base naturelle en coordonnées de trace elliptique allongée

$$\begin{cases} \|\mathbf{e}_\xi\| = \sqrt{a^2\cosh^2\xi\sin^2\eta\cos^2\phi + a^2\cosh^2\xi\sin^2\eta\sin^2\phi + a^2\sinh^2\xi\cos^2\eta} \\ \|\mathbf{e}_\eta\| = \sqrt{a^2\sinh^2\xi\cos^2\eta\cos^2\phi + a^2\sinh^2\xi\cos^2\eta\sin^2\phi + a^2\cosh^2\xi\sin^2\eta} \\ \|\mathbf{e}_\phi\| = \sqrt{a^2\sinh^2\xi\sin^2\eta\sin^2\phi + a^2\sinh^2\xi\sin^2\eta\cos^2\phi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|\mathbf{e}_\xi\| = a\sqrt{\cosh^2\xi\sin^2\eta + \sinh^2\xi\cos^2\eta} \\ \|\mathbf{e}_\eta\| = a\sqrt{\sinh^2\xi\cos^2\eta + \cosh^2\xi\sin^2\eta} \\ \|\mathbf{e}_\phi\| = a\sinh\xi\sin\eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{e}_\xi\| = a\sqrt{(1+\sinh^2\xi)\sin^2\eta + \sinh^2\xi\cos^2\eta} \\ \|\mathbf{e}_\eta\| = a\sqrt{\sinh^2\xi(1-\sin^2\eta) + \cosh^2\xi\sin^2\eta} \\ \|\mathbf{e}_\phi\| = a\sinh\xi\sin\eta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|\mathbf{e}_\xi\| = a\sqrt{\sin^2\eta + \sinh^2\xi} \\ \|\mathbf{e}_\eta\| = a\sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta} \\ \|\mathbf{e}_\phi\| = a\sinh\xi\sin\eta \end{cases}$$

27.4.7 Coordonnées de trace elliptique aplatie (ξ, η, ϕ)

27.4.7.1 Passage des coordonnées de trace elliptique aplatie aux rectangulaires

$$\begin{cases} x = a\cosh\xi\cos\eta\cos(\phi) \\ y = a\cosh\xi\cos\eta\sin(\phi) \\ z = a\sinh\xi\sin\eta \end{cases} \quad \text{avec} \quad \xi \geqslant 0, \quad -\pi/2 \leqslant \eta \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant \phi < 2\pi$$

On obtient les surfaces de coordonnées elliptiques de trace aplatie, $\xi = c^{ste}$ et $\eta = c^{ste}$, en faisant tourner les courbes de la figure 27.9 p. 379 autour de l'axe y, cet axe devenant l'axe z (axe de symétrie de révolution). Le troisième ensemble de surfaces de coordonnées, $\phi = c^{ste}$, est formé de plans coupant cet axe de révolution.

27.4.7.2 Vecteurs de la base naturelle en coordonnées de trace elliptique aplatie

Partant de l'expression du vecteur position :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{OM} &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \\ &= a\cosh\xi\cos\eta\cos(\phi)\,\mathbf{e}_x + a\cosh\xi\cos\eta\sin(\phi)\,\mathbf{e}_y + a\sinh\xi\sin\eta\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

nous trouvons l'expression des vecteurs de la base naturelle :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\xi = \partial_\xi M \\ \mathbf{e}_\eta = \partial_\eta M \\ \mathbf{e}_\phi = \partial_\phi \boldsymbol{M} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_\xi = a\sinh\xi\cos\eta\cos(\phi)\,\mathbf{e}_x + a\sinh\xi\cos\eta\sin(\phi)\,\mathbf{e}_y + a\cosh\xi\sin\eta\mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\eta = -a\cosh\xi\sin\eta\cos(\phi)\,\mathbf{e}_x - a\cosh\xi\sin\eta\sin(\phi)\,\mathbf{e}_y + a\sinh\xi\cos\eta\mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\phi = -a\cosh\xi\cos\eta\sin(\phi)\,\mathbf{e}_x + a\cosh\xi\cos\eta\cos(\phi)\,\mathbf{e}_y \end{cases}$$

27.4.7.3 Norme des vecteurs de la base naturelle en coordonnées de trace elliptique aplatie

$$\begin{cases} \|\mathbf{e}_\xi\| = \sqrt{a^2\sinh^2\xi\cos^2\eta\cos^2\phi + a^2\sinh^2\xi\cos^2\eta\sin^2\phi + a^2\cosh^2\xi\sin^2\eta} \\ \|\mathbf{e}_\eta\| = \sqrt{a^2\cosh^2\xi\sin^2\eta\cos^2\phi + a^2\cosh^2\xi\sin^2\eta\sin^2\phi + a^2\sinh^2\xi\cos^2\eta} \\ \|\mathbf{e}_\phi\| = \sqrt{a^2\cosh^2\xi\cos^2\eta\sin^2\phi + a^2\cosh^2\xi\cos^2\eta\cos^2\phi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|\mathbf{e}_\xi\| = a\sqrt{\sinh^2\xi\cos^2\eta + \cosh^2\xi\sin^2\eta} \\ \|\mathbf{e}_\eta\| = a\sqrt{\cosh^2\xi\sin^2\eta + \sinh^2\xi\cos^2\eta} \\ \|\mathbf{e}_\phi\| = a\cosh\xi\cos\eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\mathbf{e}_\xi\| = a\sqrt{\sinh^2\xi(1-\sin^2\eta) + \cosh^2\xi\sin^2\eta} \\ \|\mathbf{e}_\phi\| = a\sqrt{(1+\sinh^2\xi)\sin^2\eta + \sinh^2\xi\cos^2\eta} \\ \|\mathbf{e}_\phi\| = a\cosh\xi\cos\eta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|\mathbf{e}_\xi\| = a\sqrt{\sinh^2\xi + \sinh^2\eta} \\ \|\mathbf{e}_\phi\| = a\sqrt{\sin^2\eta + \sinh^2\xi} \\ \|\mathbf{e}_\phi\| = a\cosh\xi\cos\eta \end{cases}$$

27.4.8 Coordonnées ellipsoïdale (λ, μ, ν)

27.4.8.1 Passage des coordonnées ellipsoïdale aux rectangulaires

Le passage des coordonnées ellipsoïdales aux coordonnées rectangulaires s'obtient à partir de l'équation d'un ellipsoïde[1] de demi-axes a, b, c respectivement suivant x, y, z :

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} = 1$$

A partir de cette équation, nous écrivons les familles de surfaces orthogonales, qui constituent ce système de coordonnées :

$$\frac{u^2}{a^2-\lambda} + \frac{v^2}{b^2-\lambda} + \frac{w^2}{c^2-\lambda} = 1 \tag{249a}$$

$$\frac{u^2}{a^2-\mu} + \frac{v^2}{b^2-\mu} + \frac{w^2}{c^2-\mu} = 1 \tag{249b}$$

$$\frac{u^2}{a^2-\nu} + \frac{v^2}{b^2-\nu} + \frac{w^2}{c^2-\nu} = 1 \tag{249c}$$

avec :

$$\lambda < c^2 < \mu < b^2 < \nu < a^2 \tag{250}$$

L'équation (249a), avec la condition (250), est l'équation d'un ellipsoïde lorsque le paramètre λ est constant.

L'équation (249b), avec la condition (250), est l'équation d'un hyperboloïde à une nappe lorsque le paramètre μ est constant.

L'équation (249c), avec la condition (250), est l'équation d'un hyperboloïde à deux nappes lorsque le paramètre ν est constant.

En résolvant par rapport aux variables x, y, z, nous avons :

$$\begin{cases} u^2 = \dfrac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \\ v^2 = \dfrac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)} \\ w^2 = \dfrac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(c^2-\nu)}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)} \end{cases} \tag{251}$$

1. Voir Coniques.pdf

Vérifions que l'on retrouve, par exemple, l'équation (249a) à partir des équations (251) :

$$\begin{aligned}
&\frac{u^2}{a^2-\lambda}+\frac{v^2}{b^2-\lambda}+\frac{w^2}{c^2-\lambda}=\frac{(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{(b^2-\mu)(b^2-\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\frac{(c^2-\mu)(c^2-\nu)}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)}\\
&=\frac{(a^2-\mu)(a^2-\nu)(b^2-c^2)-(b^2-\mu)(b^2-\nu)(a^2-c^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)}+\frac{(c^2-\mu)(c^2-\nu)(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\\
&=\frac{(a^4-\mu a^2-\nu a^2+\mu\nu)(b^2-c^2)-(b^4-\mu b^2-\nu b^2+\mu\nu)(a^2-c^2)}{(a^4-b^2a^2-a^2c^2+b^2c^2)(b^2-c^2)}\\
&\qquad+\frac{(c^4-\mu c^2-\nu c^2+\mu\nu)(a^2-b^2)}{(a^4-b^2a^2-a^2c^2+b^2c^2)(b^2-c^2)}\\
&=\frac{a^4b^2-\mu a^2b^2-\nu a^2b^2+\mu\nu b^2-a^4c^2+\mu a^2c^2+\nu a^2c^2-\mu\nu c^2}{a^4b^2-b^4a^2-a^2c^2b^2+b^4c^2-a^4c^2+b^2a^2c^2+a^2c^4-b^2c^4}\\
&\qquad+\frac{-b^4a^2+\mu b^2a^2+\nu b^2a^2-\mu\nu a^2+b^4c^2-\mu b^2c^2-\nu b^2c^2+\mu\nu c^2}{a^4b^2-b^4a^2-a^2c^2b^2+b^4c^2-a^4c^2+b^2a^2c^2+a^2c^4-b^2c^4}\\
&\qquad+\frac{c^4a^2-\mu c^2a^2-\nu c^2a^2+\mu\nu a^2-c^4b^2+\mu c^2b^2+\nu c^2b^2-\mu\nu b^2}{a^4b^2-b^4a^2-a^2c^2b^2+b^4c^2-a^4c^2+b^2a^2c^2+a^2c^4-b^2c^4}\\
&=\frac{a^4b^2-b^4a^2-a^2c^2b^2+b^4c^2-a^4c^2+b^2a^2c^2+a^2c^4-b^2c^4}{a^4b^2-b^4a^2-a^2c^2b^2+b^4c^2-a^4c^2+b^2a^2c^2+a^2c^4-b^2c^4}\\
&=1
\end{aligned}$$

27.4.8.2 Norme des vecteurs de la base naturelle en coordonnées ellipsoïdale

$$\begin{cases}
\|\mathbf{e}_\lambda\|=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)}}\\[2ex]
\|\mathbf{e}_\mu\|=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(\mu-\nu)(\lambda-\mu)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)}}\\[2ex]
\|\mathbf{e}_\nu\|=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(a^2-\nu)(b^2-\nu)(c^2-\nu)}}
\end{cases}$$

27.4.9 Coordonnées bipolaires (u, v)

27.4.9.1 Passage des coordonnées bipolaires aux rectangulaires (Fig. 27.10)

$$\begin{cases}
x=\dfrac{a\sinh v}{\cosh v-\cos u}\\[1ex]
y=\dfrac{a\sin u}{\cosh v-\cos u}
\end{cases}\qquad\text{avec}\quad 0\leqslant u<2\pi,\quad -\infty<v<+\infty$$

Le passage s'écrit aussi :

$$\begin{cases}
u^2+(y-a\cot u)^2=a^2u\\
(x-a\cot v)^2+v^2=a^2v
\end{cases}$$

Les lignes de coordonnées u ou v constante sont des cercles non concentriques.

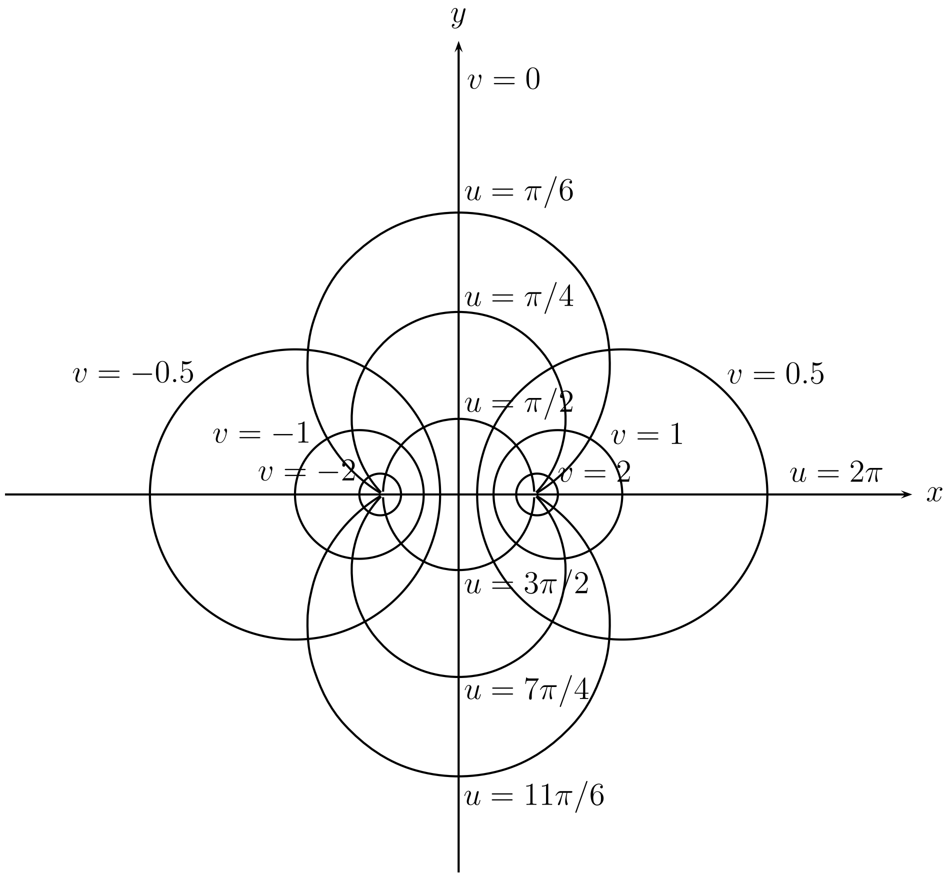


FIG. 27.10 – Coordonnées bipolaires

27.4.9.2 Vecteurs de la base naturelle en coordonnées bipolaires

Partant de l'expression du vecteur position :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{OM} &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y \\ &= \frac{a\sinh v}{\cosh v - \cos u}\mathbf{e}_x + \frac{a\sin u}{\cosh v - \cos u}\mathbf{e}_y\end{aligned}$$

nous trouvons l'expression des vecteurs de la base naturelle :

$$\begin{cases}\mathbf{e}_u = \partial_u \boldsymbol{M} \\ \mathbf{e}_v = \partial_v \boldsymbol{M}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathbf{e}_u = \dfrac{a\sinh v \sin u}{(\cosh v - \cos u)^2}\,\mathbf{e}_x + \dfrac{a\cos u(\cosh v - \cos u) - a\sin u(\cosh v + \sin u)}{(\cosh v - \cos u)^2}\,\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_v = \dfrac{a\cosh v(\cosh v - \cos u) - a\sinh v(\sinh v - \cos u)}{(\cosh v - \cos u)^2}\,\mathbf{e}_x - \dfrac{a\sin u \sinh v}{(\cosh v - \cos u)^2}\,\mathbf{e}_y\end{cases}$$

27.4.9.3 Norme des vecteurs de la base naturelle en coordonnées bipolaires

$$\begin{cases}\|\mathbf{e}_u\| = \dfrac{a}{\cosh v - \cos u} \\ \|\mathbf{e}_v\| = \|\mathbf{e}_u\|\end{cases}$$

27.4.10 Coordonnées cylindrico-bipolaires (u, v, z)

27.4.10.1 Passage des coordonnées cylindrico-bipolaires aux rectangulaires

$$\begin{cases} u^2 + (y - a\cot u)^2 = a^2 u \\ (x - a\cot v)^2 + v^2 = a^2 v \\ z = z \end{cases} \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant u < 2\pi, \ -\infty < v < +\infty, \ -\infty < z < +\infty$$

ou bien :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a\sinh v}{\cosh v - \cos u} \\ y = \dfrac{a\sin u}{\cosh v - \cos u} \\ z = z \end{cases} \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant u < 2\pi, \quad -\infty < v < +\infty, \quad -\infty < z < +\infty$$

Elles sont identiques aux coordonnées bipolaires, avec en plus $z = z$ et $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$.

27.4.11 Coordonnées toroïdales (u, v, ϕ)

27.4.11.1 Passage des coordonnées toroïdales aux cylindriques

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{a\sin u}{\cosh v - \cos u} \\ z = \dfrac{a\sinh v}{\cosh v - \cos u} \\ \phi = \phi \end{cases} \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant u < 2\pi, \quad v \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \phi < 2\pi$$

On obtient les surfaces de coordonnées toroïdales en faisant tourner les courbes de la figure 27.10 p. 384 autour de l'axe y, cet axe devenant l'axe z (axe de symétrie de révolution). Les surfaces de coordonnée $u = c^{ste}$, sont des sphères, les surfaces de coordonnées $v = c^{ste}$, sont des tores. Le troisième ensemble de surfaces de coordonnées, $\phi = c^{ste}$, est formé de plans coupant cet axe de révolution.